

Dreidimensionale Penrose-Muster und Selbstähnlichkeit

DISSERTATION
ZUR
ERLANGUNG DES DOKTORGRADES
DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN FAKULTÄT
DER UNIVERSITÄT AUGSBURG

VORGELEGT VON
RUTH MARIA KATHARINA DIETL, GEB. PAGE

AUGSBURG, JUNI 2011

Erstgutachter: Prof. Dr. J.-H. Eschenburg
Zweitgutachter: Prof. Dr. D. Hachenberger

Tag der mündlichen Prüfung: 14. Oktober 2011

Abstract

In 1974 Roger Penrose has constructed the Penrose tiling, a class of aperiodic tilings of the euclidean plane. It is made from only two sorts of tiles, the two isosceles triangles formed by the sides and diagonals of the regular pentagon. This tiling enjoys a sort of self-similarity: the tiles are subdivided uniquely by smaller tiles with equal shapes, and also the smaller tiles can be subdivided again and again by the same rule. On each stage, the small tiles together form another Penrose tiling. This process is called deflation, its inverse process is called inflation. The described property which follows in an elementary way from the pentagon geometry is purely local: the subdivision in each part of the tiling is independent from the rest of the tiling. But the same tiling can be obtained also globally by a 2-dimensional projection from the 5-dimensional space. This method has been developed by Nicolaas Govert de Bruijn as an algebraic approach to Penrose patterns and it can be used in order to construct many other tilings in the euclidean 2-plane and 3-space. However, most of these tilings do not admit a subdivision with a local construction.

In the present paper this problem of a locally defined deflation subdivision is investigated for the three-dimensional Penrose pattern, more precisely, for a class of 3-dimensional tilings for which in some sense the pentagon is replaced by the icosahedron. Such tilings are considered as possible models for quasicrystals; therefore the question of a local construction has some physical significance. However this paper follows a purely mathematical course and it is based on geometry. It shows how to understand the icosahedral Penrose pattern not by computer algorithms, but by elementary local geometric constructions. In Chapter 1, starting from de Bruijn's projection method from 6 to 3 dimensions for the icosahedral Penrose tiling, the two tiles (the building blocks) are constructed and the specific deflation is determined. In chapter 2 the possible vertex configurations of this pattern are established. This knowledge is used in Chapter 3 to investigate what happens to the tiles under deflation. Do these patterns generated by the projection method allow a unique locally defined subdivision, like the original Penrose tilings? Or at least, are there certain fixed substructures present in every subdivision? And what are the remaining choices?

The main result is the construction of such a fixed structure in every tile, having the full symmetry of the tile. It determines the deflation subdivision completely up to small gaps which allow several fillings; these fillings just differ by symmetries which however do not extend to the ambient tiling. With some greater effort, the possible fillings can also be determined. This shows that the icosahedral Penrose tiling is essentially locally determined. If a quasicrystal has such a structure, then each atom knows its place, like in a periodic crystal.

Einführung

Die Anfänge der Kunst der *Pflasterung* reichen weit in die Geschichte der Menschheit zurück. Bereits zur Zeit der Griechen und der Römer war das *Mosaik* eine äußerst beliebte Dekorationstechnik. Das Wort „Mosaik“ entstammt dem griechischen Begriff der *Musa*, den Töchtern des Zeus und der Mnemosyne, welche im antiken Griechenland nach der Überlieferung des Hesiod als Schutzgöttinnen der Wissenschaften und Künste galten. Hergestellt wurden Mosaik durch das Zusammensetzen kleiner Steine zu Bildern und Ornamenten, wozu die verschiedensten Materialien verwendet werden konnten: anfangs vor allem Kieselsteine, später dann Naturstein, Ton, Marmor oder auch Glas. Dabei spiel-



Abbildung 1.: *Neptun und Amphitrite*, Wandmosaik in Herculaneum, Italien¹

ten geometrische Gesichtspunkte, wie mögliche Symmetrien oder Periodizität, schon früh eine wichtige Rolle: Neben der Darstellung konkreter Objekte und Figuren der realen oder der mythischen Welt waren vor allem solche Mosaik von Interesse, die bestimmte Regelmäßigkeiten aufwiesen und daher dem Auge des Betrachters als besonders schön erschienen. Aus der traditionellen islamischen Kunst sind darüber hinaus auch Mosaik bekannt, die keine Periodizität, sondern die Eigenschaft der Selbstähnlichkeit besitzen, siehe [LUS],[SC].

Doch wie ist es überhaupt möglich, mit Pflastersteinen die ganze Ebene zu überdecken? Dazu ist eine *endliche Idee* nötig, die sich ins Unendliche fortsetzen lässt, und hierfür gibt es die folgenden beiden Möglichkeiten: *Periodische Fortsetzung*, d. h. alles wiederholt sich immer wieder, oder eben *Selbstähnlichkeit*, d. h. die Struktur im Großen ist der im Kleinen ähnlich.

¹<http://de.wikipedia.org/wiki/Herculaneum>, 06.05.2011

Trotz ihrer langen Geschichte in Architektur und Kunst spielten Pflasterungen in der Mathematik erstaunlicherweise über Jahrhunderte hinweg eine eher untergeordnete Rolle. So schreiben *Branko Grünbaum* und *Geoffrey Shephard* 1987 im Vorwort zu ihrem mittlerweile als Standardwerk geltenden Buch *Tilings and Patterns*: „Perhaps our biggest surprise when we started collecting material for the present work was that so little about tilings and patterns is known. We thought, naively as it turned out, that the two millenia of development of plane geometry would leave little room for new ideas. Not only were we unable to find anywhere a meaningful definition of a pattern, but we also discovered that some of the most exciting developments in this area (such as the phenomenon of aperiodicity for tilings) are not more than twenty years old“ [GS, preface]. Was ist damit konkret gemeint?

Im Jahr 1966 kann *Robert Berger* als Erster beweisen, dass es überhaupt möglich ist, die Ebene aperiodisch zu pflastern. Sein ursprüngliches Beispiel verwendet noch 20426 verschiedene Pflastersteine, sogenannte *Wang Dominos*, doch schon wenig später gelingt es ihm, die Anzahl der benötigten Steine auf 104 zu reduzieren. In den folgenden Jahren werden immer kleinere Sätze von Pflastersteinen gefunden, bis schließlich *Roger Penrose*, Mathematiker und theoretischer Physiker, 1974 das nach ihm benannte *Penrose-Muster*, eine aperiodische Pflasterung der Ebene bestehend aus nur zwei verschiedenen Pflastersteinen, findet, siehe [P]. *Martin Gardner* verkündet diese Entdeckung in seiner damals

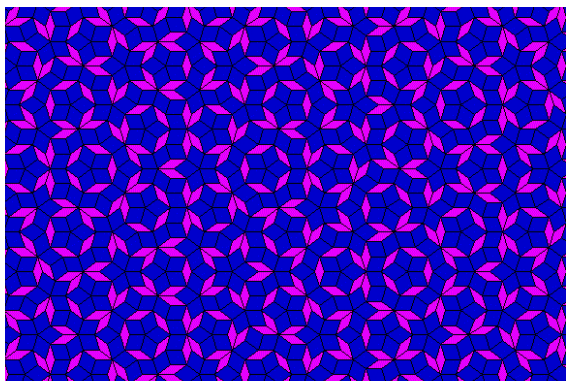


Abbildung 2.: Ausschnitt aus einem Penrose-Muster²

viel gelesenen Kolumne *Mathematical Games* in der Augustausgabe 1975 des *Scientific American*. Im darauf folgenden Frühjahr erreicht Gardner ein Brief von *Robert Ammann*, der behauptet, ebenfalls zwei Pflastersteine gefunden zu haben, welche die Ebene aperiodisch pflastern. Gardner ist überrascht, denn weder er noch die damalige Fachwelt kennen Ammann. Wie sich herausstellt, hat Ammann das Penrose-Muster gleichfalls entdeckt, jedoch mit einer völlig anderen Herangehensweise und einem anderen Paar von Pflastersteinen. Doch wer ist dieser Mann? Ammann selbst bezeichnet sich auf diese Frage hin als „amateur doodler with math background“ [S2, p. 11]. In jenem Brief an Gardner berichtet er zudem von einem Set dreidimensionaler Pflastersteine zur Erzeugung einer aperiodischen Pflasterung des Raums, welche jedoch zu dieser Zeit – nur

²<http://www.spiegel.de/fotostrecke/fotostrecke-28393-2.html>, 06.05.2011

wenige Jahre später wird sich dies entscheidend ändern – kaum Aufmerksamkeit erregt. Vielmehr ist die Fachwelt überrascht von den Ideen und der scheinbaren Leichtigkeit, mit der es Ammann gelingt, im Lauf der Jahre immer neue aperiodische Pflasterungen der Ebene bestehend aus je zwei Pflastersteinen zu finden. 1981 entwickelt *Nicolaas Govert de Bruijn* schließlich weiterführende algebraische Ansätze zur Erzeugung des Penrose-Musters: die *Projektionsmethode* sowie die *Gittermethode*, siehe [B].³

Neben seiner Aperiodizität besitzt das Penrose-Muster noch eine weitere erstaunliche Eigenschaft: Die beiden Pflastersteine können in kleinere, formgleiche Steine unterteilt werden, die wiederum ein Penrose-Muster bilden. Diesen Vorgang bezeichnet man als *Deflation*, die Umkehrung dieses Prozesses entsprechend als *Inflation*. Das Besondere ist nun weniger, dass diese Deflationseigenschaft existiert, als vielmehr, dass sie im Fall des zweidimensionalen Penrose-Musters eindeutig ist, was bedeutet, dass die beiden Steine auf immer genau die gleiche Art und Weise unterteilt werden. Der *Deflationsfaktor*, um den die Pflastersteine gegenüber dem Ausgangsmuster verkleinert werden, beträgt dabei $\frac{1}{\Phi}$, wobei Φ den *Goldenen Schnitt* bezeichnet mit $\Phi := \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$.

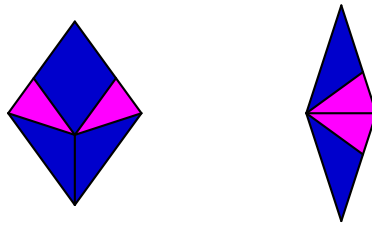


Abbildung 3.: Die eindeutige Unterteilung der beiden Pflastersteine im Penrose-Muster

Der Physiker *Alan Mackay* ist einer der ersten, der die möglichen Anwendungen dieses Musters in der Festkörperphysik sieht, vgl. [M1],[M2]. Mit der bahnbrechenden Entdeckung der *Quasikristalle* von *Dan Shechtman* und seiner Arbeitsgruppe im Jahr 1984, siehe [SBGC], nimmt das Interesse an aperiodischen Pflasterungen schließlich sprunghaft zu. Spätestens ab diesem Zeitpunkt sehen auch benachbarte Wissenschaften wie die Kristallographie, die Chemie oder die Physik die Verbindungen dieses Themas zu ihrem eigenen Fach und in diesem Kontext stellt sich schon bald die Frage nach einem möglichen dreidimensionalen Penrose-Muster. So verallgemeinern ebenfalls 1984 *Peter Kramer* und *Reinhardt Neri* die Gittermethode von de Bruijn, siehe [KN], und liefern damit, wie sich herausstellt, den theoretischen Rahmen für die von Ammann bereits genannten und erstmals bei Mackay ausführlich behandelten Pflastersteine des dreidimensionalen Penrose-Musters, siehe [M1]. In Analogie zu de Bruijns *Pentagrid* zur Erzeugung des zweidimensionalen Penrose-Musters führen Kramer und Neri ein sogenanntes *Hexagrid* ein. Zu diesem Zweck arbeiten sie mit der Projektion des \mathbb{R}^{12} auf den \mathbb{R}^3 und stellen die Verbindung des dreidimensionalen Penrose-Musters zur *Ikosaedergruppe* her, die isomorph ist zur *alternierenden Gruppe* A_5 .

³Die Äquivalenz dieser beiden Methoden ist implizit bereits bei de Bruijn gegeben, siehe [S1, p. 169], in größerer Allgemeinheit und detaillierter findet sich dies auch in [GR].

Die drei Physiker *Dov Levine*, *Joshua Socolar* und *Paul Steinhardt* präsentieren eine weitere Verallgemeinerung von de Bruijns Ansatz, die sogenannte *generalized dual method*, kurz *GDM* genannt, zur Erzeugung von zwei- bzw. dreidimensionalen Quasikristallen mit beliebiger Symmetrie, siehe [SSL]. Aus physikalischer Sicht verfolgen sie ferner die Frage nach möglichen *matching rules*, d. h. lokalen *Anlegeregeln*, für das dreidimensionale Penrose-Muster und schlagen in diesem Zusammenhang nicht zwei, sondern vier mögliche Grundbausteine vor, vgl. [LS],[SS]. *Michel Duneau* und *Andre Katz* gelingt es schließlich, auch die Projektionsmethode von de Bruijn in einen allgemeineren Kontext zu stellen, siehe [KD], und weitere wichtige Fragen in Bezug auf das dreidimensionale Penrose-Muster zu klären: die Gestalt des sogenannten *Windows* oder *Akzeptanzbereichs* als die eines Rhombentriakontaeders sowie die Ermittlung des *Inflationsfaktors* Φ^3 . Ferner zeigen sie, dass die Eigenschaft der Inflation anders als im zweidimensionalen Fall nicht mehr eindeutig ist. Die Frage, wie eine mögliche Unterteilung der beiden Pflastersteine des dreidimensionalen Penrose-Musters aussehen kann, bleibt offen. 1988 versucht Katz ebenfalls, lokale Anlegeregeln für das dreidimensionale Penrose-Muster zu finden, siehe [K], muss zu diesem Zweck jedoch die Anzahl der benötigten Steine auf insgesamt 22 erhöhen.

Auch der Japaner *Tohru Ogawa* setzt sich in diesen Jahren intensiv mit dem dreidimensionalen Penrose-Muster auseinander, siehe [O1],[O2]. Er erzeugt dieses Muster durch Inflation – er selbst spricht hier allerdings von *Penrose-Transformation* – und unterscheidet für jeden der beiden Pflastersteine zwei Teile: einen *skeleton part*, welcher analog zum Fall des zweidimensionalen Penrose-Musters eindeutig festgelegt ist, sowie einen *internal part*, der im Gegensatz dazu Wahlfreiheiten zulässt. Einige Jahre später bringt Ogawa seine Vorgehensweise mit der Projektionsmethode in Verbindung und ermittelt davon ausgehend die möglichen Eckenkonstellationen des dreidimensionalen Penrose-Musters, bemerkt aber zugleich, dass diese Methode nicht zwingend zum selben Ergebnis führen muss wie die von ihm zuvor definierte Penrose-Transformation.

Der Überblick über die Forschungsgeschichte macht klar, dass es vor allem physikalisch motivierte Ansätze zur Untersuchung des dreidimensionalen Penrose-Musters als eines möglichen Modells für die 1984 entdeckten Quasikristalle gibt. Die vorliegende Arbeit versucht nun eine rein mathematische Herangehensweise an dieses Thema. Sie ist in der Geometrie verankert und zeigt einen Weg auf, das dreidimensionale Penrose-Muster und dessen besondere Eigenschaften nicht mittels Computeralgorithmen, sondern vielmehr durch elementargeometrische Konstruktionen zu erschließen. Mit Hilfe der von de Bruijn eingeführten Projektionsmethode wird einleitend in Kapitel 1 die Konstruktion der beiden Pflastersteine gezeigt, bevor dann in einem weiteren Schritt in Kapitel 2 die möglichen Eckenkonstellationen dieses Musters ermittelt werden. Mit diesem Wissen soll in Kapitel 3 schließlich die Frage beantwortet werden, was unter Deflation passiert: Kann das durch die Projektionsmethode erzeugte dreidimensionale Penrose-Muster eindeutig unterteilt werden oder nicht? Und falls nein: Gibt es gewisse feste Strukturen, die immer existieren? Und wie verhalten sich unter Umständen bestehende Wahlmöglichkeiten?

Ein unverzichtbares Hilfsmittel auf dem Weg zur vorliegenden Arbeit war das geometrische Stecksystem von *Zometool Inc.* Dem Gründer dieser Firma, *Paul Hildebrandt*, der meine Fragen stets zuvorkommend beantwortete und mir viele Möglichkeiten dieses genialen Konstruktionssets aufzeigte, siehe [ZT], möchte ich an dieser Stelle meinen besonderen Dank aussprechen, denn ich wusste nicht, was ich ohne ihn und seine Hilfsbereitschaft getan hätte! Wie sich im Lauf der Zeit herausstellen sollte, hat die Firma Zometool Inc. mehr mit der vorliegenden Arbeit zu tun, als anfangs zu erahnen war: Anknüpfend an den russischen Kristallographen *E. S. Fedorov* definierte *Harold Scott McDonald Coxeter*, der bekannte kanadische Geometer, *Zonoeder* als konvexe Polyeder mit punktsymmetrischen Seiten, siehe [C]. Unter diesen gibt es nun gewissermaßen besonders „schöne“, welche Coxeter *Goldene Isozonoeder* nennt: Zonoeder, deren Grundseiten allesamt *Goldene Rauten* sind. Eine Goldene Raute ist dabei eine Raute, deren Diagonalen sich im Verhältnis des Goldenen Schnitts teilen. Insgesamt existieren nur fünf solcher Goldenen Isozonoeder.

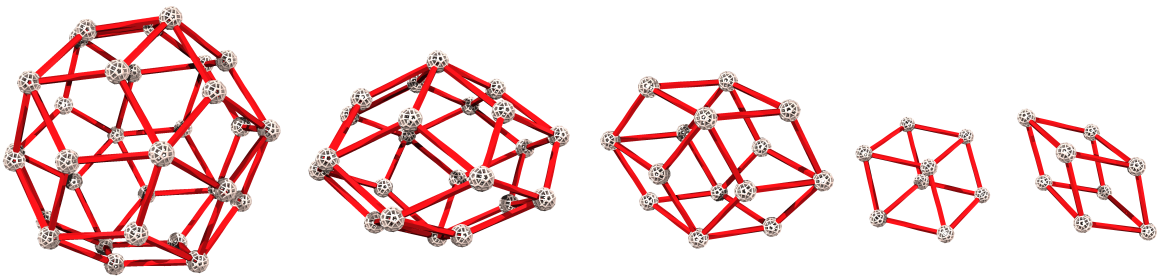


Abbildung 4.: Die fünf Goldenen Isozonoeder, von links nach rechts: das Rhombentriakon- taeder, das Rhombenikosaeder, das Rhombendodekaeder sowie zwei Rhombenhexaeder⁴

Einer, der von diesen geometrischen Gebilden besonders fasziniert war, ist der Amerikaner *Steve Baer*, ein Pionier auf dem Gebiet der Solarenergie und Entwickler einer Bauweise, die inspiriert ist von fraktaler Geometrie, vgl. [DC]. Baer studierte unter anderem Mathematik an der ETH Zürich, wo auch sein Interesse für eben jene Zonoeder geweckt wurde. In den USA gründete er 1969 die Firma *Zomeworks* mit dem Ziel, Gebäude in Form der sogenannten *zomes* zu bauen, siehe [ZW]. Das von seinem Freund *Steve Durkee* kreierte Kunstwort „zome“ entstand dabei aus der Verschmelzung der beiden englischen Begriffe „zonohedron“ und „dome“. Die ersten Experimente mit derartigen Gebäuden führte Baer unter anderem in Zusammenarbeit mit den Mitgliedern von *Drop City*, einer der ersten Hippie-Kommunen, in Colorado durch, vgl. Abbildung 5.

Im Lauf der Jahre wurde so auch ein geometrisches Stecksystem, genannt *Zometoy*, entwickelt, das aus kleinen Plastikbällen, die als Gelenke fungieren, sowie verschiedenen Holzstangen unterschiedlicher Größe besteht. Die Lizenz für dieses Stecksystem erwarb schließlich die Firma Zometool Inc., wo das System von *Marc Pelletier* und eben Paul Hildebrandt noch einmal entscheidend weiterentwickelt wurde und nun unter dem Namen *Zometool* verkauft wird. Auf Grund seiner exakten mathematischen Definition kann

⁴Mit freundlicher Genehmigung von Paul Hildebrandt, Zometool Inc.

Zometool heute als Konstruktionsset für eine Vielzahl geometrischer Körper, darunter auch für die oben genannten Goldenen Isozonoeder, benutzt werden. Da nun die beiden Pflastersteine des dreidimensionalen Penrose-Musters gerade identisch sind mit zweien dieser fünf Goldenen Isozonoeder, genauer gesagt mit den beiden in Abbildung 4 dargestellten Rhombenhexaedern, ist es keine Überraschung mehr, dass Zometool für mich zu einem unersetzlichen Hilfsmittel wurde!



Abbildung 5.: Links *Cartop Dome*, Baers erstes Gebäude für Drop City, und rechts eine Panoramaansicht der Kommune⁵

Neben Paul Hildebrandt gilt mein herzlicher Dank insbesondere meinem Doktorvater *Jost-Hinrich Eschenburg*, der mich zu dieser Arbeit ermunterte, mich vielfältig unterstützte und stets zu fruchtbaren mathematischen Diskussionen bereit war. Viele seiner Anregungen trugen zum Gelingen der vorliegenden Arbeit bei.

Danken möchte ich schließlich der *Deutschen Forschungsgemeinschaft*, die durch das Projekt *Globale Differentialgeometrie* auch den finanziellen Rahmen meiner Arbeit sicherstellte.

⁵<http://www.dropcitydoc.com/Domes.html> bzw. http://en.wikipedia.org/wiki/Drop_City, 06.05.2011

Inhaltsverzeichnis

Einführung	i
1. Die Projektionsmethode	1
1.1. Die Projektionsmethode im \mathbb{R}^2	1
1.2. Inflation und Deflation im \mathbb{R}^2	2
1.3. Übertragung auf Penrose 3D	4
1.3.1. Ausgangsraum, Projektionsraum E und Hilfsraum F	5
1.3.2. Die Inflationsmatrix S	7
1.3.3. Das Muster M_E im Projektionsraum E	7
1.3.4. Das Fenster V im Hilfsraum F	16
2. Das Fenster V	31
2.1. Gebiete und Eckentypen im \mathbb{R}^2	32
2.2. Gebiete und Eckentypen im Fall von Penrose 3D	35
2.2.1. Der Kern des Fensters V	35
2.2.2. Die weiteren Gebiete des Fensters V	36
2.2.3. Überlegungen zur Anordnung der Pflastersteine	64
3. Deflation im Fall von Penrose 3D	69
3.1. Der erste Deflationszug: Transformation der Ecken	69
3.2. Der zweite Deflationszug: Die Blumen	73
3.3. Der dritte Deflationszug: Verlust der Eindeutigkeit	85
3.4. Die Linsen	87
3.5. Die Festlegung auf einen Pflasterstein	96
3.5.1. Die Unterteilung des flachen Pflastersteins	96
3.5.2. Die Unterteilung des langen Pflastersteins	126
4. Zusammenfassung der Ergebnisse	159
A. Anhang	167
A.1. Berechnungen zur Inflationsmatrix S	167
A.2. Die Geometrie des Ikosaeders	170
A.3. Hilfskonstruktionen bezüglich des Fensters V	176
A.4. Die Gebietseinteilungen der unterschiedlichen Ebenentypen	185
Literaturverzeichnis	203

1. Die Projektionsmethode

Die Projektionsmethode ist eine bekannte Methode zur Erzeugung von Pflasterungen – sowohl periodischer als auch aperiodischer Art, vgl. [B].

Allgemein geht man dabei von einem n -dimensionalen Gitter des \mathbb{R}^n aus, von dem dann ein bestimmter Ausschnitt auf einen k -dimensionalen affinen Unterraum des \mathbb{R}^n orthogonal projiziert wird. Die auf diese Art und Weise entstehenden k -dimensionalen Pflastersteine sind somit die Projektionen der k -dimensionalen Seiten des n -dimensionalen Einheitswürfels. Um mit diesem Vorgehen ein quasiperiodisches Muster zu erzeugen, muss der k -dimensionale Unterraum *irrationale Steigung* besitzen, was bedeutet, dass der zugehörige lineare Unterraum $\mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ nicht trifft, siehe [ST].

Für ein besseres Verständnis ist es hilfreich, sich die Projektionsmethode am Beispiel des \mathbb{R}^2 klarzumachen.

1.1. Die Projektionsmethode im \mathbb{R}^2

Gemäß den obigen Überlegungen sei $n = 2$ und $k = 1$. Das zweidimensionale Gitter des \mathbb{R}^2 ist hier nichts anderes als das gewöhnliche Rechenkästchenmuster der Ebene, und der eindimensionale Unterraum, auf den orthogonal projiziert werden soll, entspricht in diesem Fall einer Geraden, genannt E .

Wie aber kann man festlegen, welche ganzzahligen Gitterpunkte $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$, also welche Ecken des Rechenkästchenmusters, auf E projiziert werden und welche nicht? Die Idee dazu ist folgende: Man betrachtet den offenen Streifen $E + I^2$, wobei I das offene Ein-

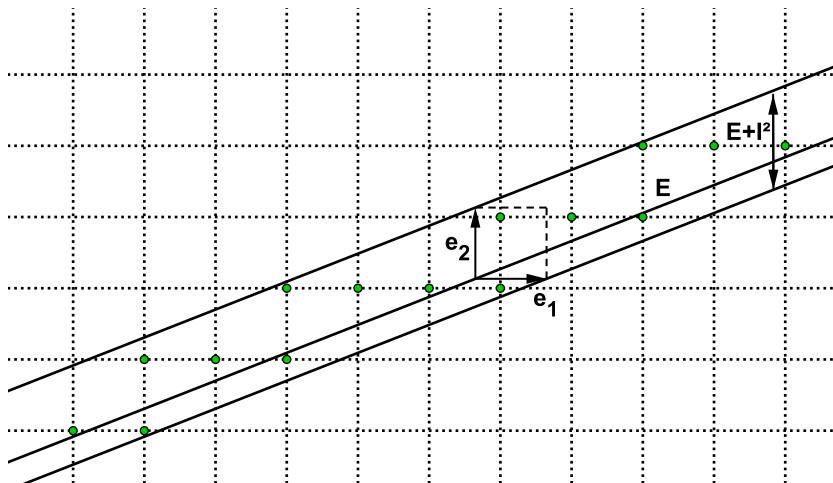


Abbildung 1.1.: Die Projektionsmethode im \mathbb{R}^2

1. Die Projektionsmethode

heitsintervall $(0, 1)$ bezeichnet, den man bekommt, lässt man das offene Einheitsquadrat I^2 , im Weiteren auch *Einheitswürfel* genannt, entlang der Geraden E laufen. Alle Gitterpunkte innerhalb des Streifens $E + I^2$, grün markiert in Abbildung 1.1, werden auf E projiziert, alle anderen nicht.

Das Muster M_E auf der Geraden E , das wir in diesem Fall erhalten, ist eindimensional: Die Pflastersteine sind die Projektionen der eindimensionalen Seiten des zweidimensionalen Einheitswürfels und somit besteht das Muster M_E aus einer Abfolge von Abschnitten, die genau zwei verschiedene Längen haben, rot und blau in Abbildung 1.2 eingezeichnet. Die Projektionspunkte sind die Unterteilungspunkte zwischen diesen Abschnitten.



Abbildung 1.2.: Das Muster M_E auf der Geraden E : Die roten Abschnitte sind die Projektionen der e_1 -Seiten von I^2 auf E , die blauen Abschnitte die Projektionen der e_2 -Seiten von I^2 auf E .

Bevor wir diese Methode jedoch auf das dreidimensionale Penrose-Muster (Penrose 3D) übertragen, soll das Konzept der Inflation und deren Umkehrung, genannt Deflation, eingeführt werden – für ein besseres Verständnis zunächst auch am Beispiel des \mathbb{R}^2 .

1.2. Inflation und Deflation im \mathbb{R}^2

Die lineare Abbildung S sei gegeben durch $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Diese symmetrische Matrix ist ganzzahlig und wegen $\det S = -1$ auch ganzzahlig invertierbar, was bedeutet, dass S das ganzzahlige Gitter \mathbb{Z}^2 bijektiv auf sich selbst abbildet. Die Eigenwerte sind

$$\lambda_1 = -\frac{1}{\Phi} = -\varphi \quad \text{und} \quad \lambda_2 = \Phi$$

mit den zugehörigen Eigenvektoren $\omega_1 = (\Phi, 1)$ und $\omega_2 = (-1, \Phi)$. Dabei bezeichnet Φ den *Goldenen Schnitt* mit $\Phi := \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ und $\varphi := \Phi - 1 = \frac{1}{\Phi}$, denn es gilt die definierende Gleichheit $\Phi^2 = \Phi + 1$. Setzt man nun $F = \mathbb{R}\omega_2$ sowie $E_0 = \mathbb{R}\omega_1$ und $E = E_0 + a$ für ein $a \in F$, so erhält man mittels Projektionsmethode, wie in 1.1 beschrieben, das eindimensionale Muster M_E auf der Geraden E , i. e.

$$(1.1) \quad M_E = \pi_E(\mathbb{Z}^2 \cap (E + I^2)),$$

wobei π_E die orthogonale Projektion auf E bezeichnet.

Was aber passiert mit E und $E + I^2$ unter S ? Wegen $S(E) = S(E_0 + a) = E_0 + \Phi a$ wird die Gerade E auf eine zu E parallele Gerade $E_0 + \Phi a := E'$ abgebildet, und folglich der Streifen $E + I^2$ auf den verformten Streifen $S(E + I^2) = E' + SI^2$. Diese Verformung des

zweidimensionalen Einheitswürfels I^2 unter S lässt sich berechnen: I^2 wird aufgespannt von den beiden Einheitsvektoren $e_1 = (1, 0)$ und $e_2 = (0, 1)$ und somit ist der verformte Einheitswürfel SI^2 der Aufspann der beiden verzerrten Basisvektoren $Se_1 = (0, -1)$ und $Se_2 = (-1, 1)$.

Allerdings gibt es noch eine zweite – und für das weitere Vorgehen sehr wichtige – Möglichkeit, die Verformung von I^2 unter S zu ermitteln: Wegen $\langle \omega_1, \omega_2 \rangle = -\Phi + \Phi = 0$ stehen die Geraden F und E senkrecht aufeinander, daher kann der Streifen $E + I^2$ auch mit Hilfe der orthogonalen Projektion π_F des offenen Einheitswürfels I^2 auf F beschrieben werden:⁶

$$(1.2) \quad E + I^2 = E + V \quad \text{mit } V := \pi_F(I^2),$$

wobei V als *Fenster* (Window, vgl. [B]) bezeichnet wird. Mit dieser Beschreibung ist die Verformung von I^2 unter S sofort ersichtlich: $S(E + I^2) = S(E + V) = E' + \Phi V$, da $V \subset F$, und das ist eine Vergrößerung des Fensters V um den Faktor Φ . Somit ist der verformte Streifen $E' + SI^2 = E' + \Phi V$ um den Faktor Φ breiter als der Streifen $E' + I^2 = E' + V$.

Wenden wir jetzt die Projektionsmethode auf den gewöhnlichen Streifen $E' + I^2$ und den verformten Streifen $E' + SI^2$ an, so erhalten wir zwei unterschiedliche eindimensionale Muster auf der Geraden E' : das Muster $M_{E'}$, durch Projektion aller ganzzahligen Gitterpunkte innerhalb des Streifens $E' + I^2$ auf E' , i. e.

$$(1.3) \quad M_{E'} = \pi_{E'}(\mathbb{Z}^2 \cap (E' + I^2)),$$

und das Muster SM_E , durch Projektion aller ganzzahligen Gitterpunkte innerhalb des verformten Streifens $E' + SI^2$ auf E' , i. e.

$$(1.4) \quad SM_E = \pi_{E'}(\mathbb{Z}^2 \cap (E' + SI^2)) = \pi_{E'}(S(\mathbb{Z}^2 \cap (E + I^2))).^7$$

Was ist nun der Zusammenhang zwischen dem Muster M_E auf der Geraden E und den Mustern $M_{E'}$ und SM_E auf der Geraden E' ?

Beobachtung 1.1. *Das Muster SM_E ist eine echte Verfeinerung des Musters $M_{E'}$, i. e. $M_{E'} \subset SM_E$. Die Fliesen von SM_E sind dabei um den Faktor φ kleiner als die Fliesen von $M_{E'}$.*

Beweis. Da der verformte Streifen $E' + SI^2 = E' + \Phi V$ um den Faktor Φ breiter ist als der gewöhnliche Streifen $E' + I^2 = E' + V$ gilt $E' + I^2 \subset E' + SI^2$ und mit (1.3) und (1.4) folgt: $M_{E'} = \pi_{E'}(\mathbb{Z}^2 \cap (E' + I^2)) \subset \pi_{E'}(\mathbb{Z}^2 \cap (E' + SI^2)) = SM_E$. Zudem hat S den Eigenwert $-\varphi$ in Richtung E' , deshalb sind die Fliesen des Musters $SM_E \subset E'$ um genau diesen Faktor φ kleiner als die Fliesen des Musters $M_{E'} \subset E'$. \square

⁶Im Folgenden soll F daher auch *Hilfsgerade* bzw. *Hilfsraum* genannt werden.

⁷Für die letzte Gleichheit ist entscheidend, dass S das Gitter \mathbb{Z}^2 bijektiv auf sich selbst abbildet: Jeder ganzzahlige Gitterpunkt in $E' + SI^2$ besitzt daher unter S einen eindeutigen ganzzahligen Gitterpunkt in $E + I^2$ als Urbild, und somit gilt $\pi_{E'}(\mathbb{Z}^2 \cap (E' + SI^2)) = \pi_{E'}(S(\mathbb{Z}^2 \cap (E + I^2)))$!

1. Die Projektionsmethode

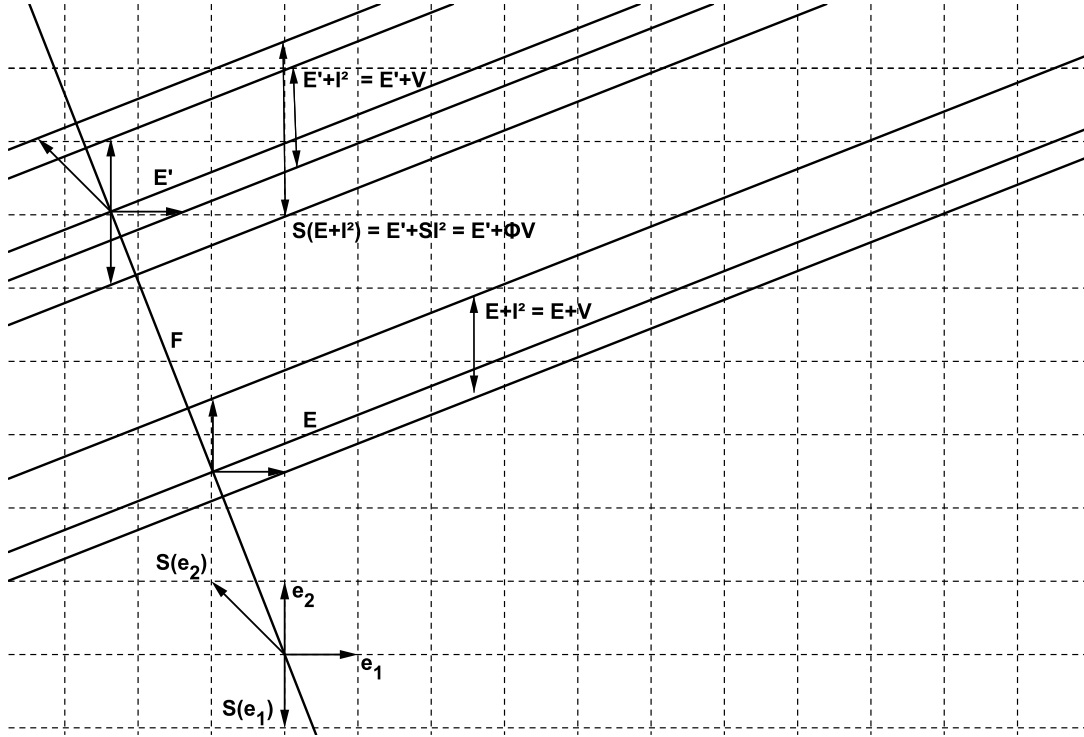


Abbildung 1.3.: Die Inflationseigenschaft im \mathbb{R}^2

Beobachtung 1.2. Das Muster SM_E ist ähnlich zu dem Muster M_E . Genauer: SM_E ist ein gespiegeltes und um den Faktor φ verkleinertes Abbild von M_E .

Beweis. Die Gerade E ist nach Definition ein verschobener Eigenraum von S und daher gilt $\pi_E \circ S = S \circ \pi_E$. Wegen (1.1) und (1.4) ist somit $SM_E = \pi_{E'}(\mathbb{Z}^2 \cap (E' + SI^2)) = \pi_{S(E)}(S(\mathbb{Z}^2 \cap (E + I^2))) = S(\pi_E(\mathbb{Z}^2 \cap (E + I^2))) = S(M_E)$ mit $M_E \subset E$ und S besitzt den Eigenwert $-\varphi$ in Richtung E . \square

Mit Hilfe dieser Ergebnisse kann schließlich das Konzept der Inflation definiert werden, siehe auch [ER]: Beobachtung 1.1 bedeutet im Umkehrschluss, dass das Muster $M_{E'}$ ein echtes Teilmuster des zu M_E ähnlichen Musters SM_E ist. Dieses Phänomen soll als *Inflation* bezeichnet werden: Die Fliesen von SM_E , und somit die Fliesen von M_E , lassen sich zu größeren Fliesen zusammensetzen, die ein analoges Muster bilden, vgl. [E]. $M_{E'}$ wird daher *Inflationmuster* von SM_E genannt und die Abbildung S auch *Inflationsabbildung*. Die Umkehrung dieses Prozesses bezeichnen wir als *Deflation*: Das Muster SM_E heißt demnach *Deflationmuster* von $M_{E'}$ und die Abbildung $T := S^{-1}$ auch *Deflationsabbildung*.

1.3. Übertragung auf Penrose 3D

Die soeben beschriebenen Konzepte sollen nun auf das dreidimensionale Penrose-Muster übertragen werden. Dabei sind folgende Fragen zu klären:

1. Was ist der Ausgangsraum, was der Projektionsraum E und was der Hilfsraum F ?
2. Wie lautet die Inflationsmatrix S ?
3. Wie sieht das Muster M_E im Projektionsraum E aus?
4. Was ist die Gestalt des Fensters V im Hilfsraum F ?

1.3.1. Ausgangsraum, Projektionsraum E und Hilfsraum F

Ausgangspunkt für unsere Überlegungen ist der \mathbb{R}^{12} : Den zwölf Ecken des Ikosaeders ordnen wir die zwölf Basisvektoren c_1, \dots, c_{12} des \mathbb{R}^{12} zu und benennen diese um in $a_1, \dots, a_6, b_1, \dots, b_6$, so dass b_i jeweils die gegenüberliegende Ecke von a_i ist: (a_i, b_i) bilden demnach *Antipodenpaare* für $1 \leq i \leq 6$. Die Drehgruppe G des Ikosaeders, isomorph zur alternierenden Gruppe A_5 , wird auf diese Weise zu einer Gruppe von 12×12 -Matrizen. Mit Hilfe dieser Konstruktion lässt sich der \mathbb{R}^{12} rational in die zwei komplementären Unterräume W und W' zerlegen, wobei $W := \text{Spann}\{e_i\}$ mit $e_i := a_i - b_i$ für $1 \leq i \leq 6$ und $W' := \text{Spann}\{f_i\}$ mit $f_i := a_i + b_i$ für $1 \leq i \leq 6$, beide isomorph zum \mathbb{R}^6 .

Beobachtung 1.3. *Die Unterräume W und W' sind beide invariant unter G , i. e. $\sigma(w) \in W$ und $\sigma(u) \in W'$ für alle $w \in W, u \in W'$ und für alle $\sigma \in G$.*

Beweis. Sei $A: a_i \mapsto b_i$ die Abbildung, die für $1 \leq i \leq 6$ jeder Ikosaederecke a_i ihre antipodale Ecke b_i zuordnet. Offensichtlich gilt $A \circ \sigma = \sigma \circ A$ für alle $\sigma \in G$, und somit erhalten wir für die Basisvektoren $f_i \in W'$ und $e_i \in W$ mit $1 \leq i \leq 6$:

$$\begin{aligned} \sigma(f_i) &= \sigma(a_i + b_i) = \sigma(a_i) + \sigma(b_i) = \sigma(a_i) + \sigma(Aa_i) \\ &= \sigma(a_i) + A\sigma(a_i) = f_k \end{aligned}$$

für ein $k \in \{1, \dots, 6\}$, da Ikosaederecken unter allen Drehungen $\sigma \in G$ wieder auf Ikosaederecken abgebildet werden. Analog gilt $\sigma(e_i) = \sigma(a_i - b_i) = \sigma(a_i) - A\sigma(a_i)$, und das ist gleich e_k für ein $k \in \{1, \dots, 6\}$, falls $\sigma(a_i) \in \{a_1, \dots, a_6\}$, und gleich $-e_k$ für ein $k \in \{1, \dots, 6\}$, falls $\sigma(a_i) \in \{b_1, \dots, b_6\}$. \square

Im Folgenden ist

$$(1.5) \quad W = \text{Spann}\{e_i = a_i - b_i\} \quad \text{mit } 1 \leq i \leq 6$$

von Interesse: Diesen sechsdimensionalen Raum wählen wir als *Ausgangsraum* für die Projektionsmethode. Was aber ist der Projektionsraum E und was der Hilfsraum F ?

Dazu betrachten wir die lineare Abbildung $U(c_i) := \sum \text{Nachbarecken}(c_i)$ für $1 \leq i \leq 12$ auf dem \mathbb{R}^{12} . Wie ist diese Abbildungsvorschrift zu verstehen? Jeder der zwölf Ikosaederecken wird nach Konstruktion genau einer der Basisvektoren c_1, \dots, c_{12} zugeordnet und wir können somit von den Nachbarecken der c_i für alle $i \in \{1, \dots, 12\}$ sprechen. Wegen $e_i := a_i - b_i$ mit $1 \leq i \leq 6$ ist die Einschränkung von U auf den sechsdimensionalen Unterraum $W \subset \mathbb{R}^{12}$, welche mit $U|_W$ bezeichnet werden soll, aber auch für alle

1. Die Projektionsmethode

Basisvektoren e_1, \dots, e_6 von W definiert, und in diesem Sinne kann man ebenso von den Nachbarecken der e_i für alle $i \in \{1, \dots, 6\}$ sprechen, i. e.

$$(1.6) \quad U|_W(e_i) = \sum \text{Nachbarecken}(e_i) \quad \text{mit } 1 \leq i \leq 6.$$

Die Wahl der Ikosaederecken a_1, \dots, a_6 geht somit entscheidend ein, denn sie legt wegen $b_i := \text{Antipodenecke}(a_i)$ sowohl $\{b_i\}$ als auch $\{e_i := a_i - b_i\}$ für $1 \leq i \leq 6$ fest. Für die vorliegende Arbeit gelte die folgende Festlegung:

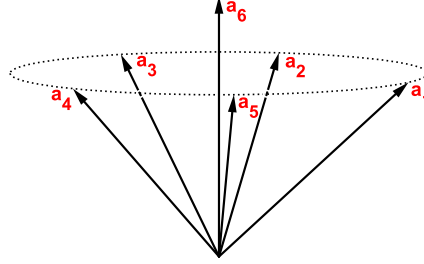


Abbildung 1.4.: Die Zuordnung der Ikosaederecken a_1, \dots, a_6

Mit Hilfe der Abbildung U kann man nun auf dem Ausgangsraum W eine weitere lineare Abbildung, genannt S , wie folgt definieren:

$$(1.7) \quad S := 2I - U|_W \quad \text{mit } I := \text{Einheitsmatrix im } \mathbb{R}^6.$$

Beobachtung 1.4. $W \cong \mathbb{R}^6$ zerfällt unter S reell in zwei orthogonale Unterräume $E_{(2+\sqrt{5})} \oplus E_{(2-\sqrt{5})}$, beide G -invariant und isomorph zum \mathbb{R}^3 .

Beweis. S ist symmetrisch und damit reell diagonalisierbar. Die Eigenwerte sind

$$\Phi^3 = \frac{1}{8}(1 + \sqrt{5})^3 = \frac{1}{8}(1 + 3\sqrt{5} + 3 \cdot 5 + 5\sqrt{5}) = 2 + \sqrt{5}$$

zu den (komplexen) Eigenvektoren $e_6 - \Sigma_6$ und Σ_{α^2} sowie $\Sigma_{\bar{\alpha}^2}$ und

$$-\varphi^3 = \frac{1}{8}(1 - \sqrt{5})^3 = \frac{1}{8}(1 - 3\sqrt{5} + 3 \cdot 5 - 5\sqrt{5}) = 2 - \sqrt{5}$$

zu den (komplexen) Eigenvektoren $e_6 + \Sigma_6$ sowie Σ_α und $\Sigma_{\bar{\alpha}}$. Dabei gilt mit $\alpha = \exp(\frac{2\pi i}{5})$:

$$\Sigma_6 = \frac{1}{\sqrt{5}}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5) \quad \text{und} \quad \Sigma_\alpha = e_1 + \alpha e_2 + \alpha^2 e_3 + \alpha^3 e_4 + \alpha^4 e_5.$$

Für eine genaue Berechnung siehe A.1. Mit $E_{(2+\sqrt{5})} = \text{Spann}\{e_6 - \Sigma_6, \Sigma_{\alpha^2}, \Sigma_{\bar{\alpha}^2}\} \cong \mathbb{R}^3$ und $E_{(2-\sqrt{5})} = \text{Spann}\{e_6 + \Sigma_6, \Sigma_\alpha, \Sigma_{\bar{\alpha}}\} \cong \mathbb{R}^3$ folgt:

$$W \cong \mathbb{R}^6 \cong E_{(2+\sqrt{5})} \oplus E_{(2-\sqrt{5})} \quad \text{und} \quad E_{(2+\sqrt{5})} \perp E_{(2-\sqrt{5})}.$$

Weil Nachbarrelationen im Ikosaeder unter allen Drehungen $\sigma \in G$ erhalten bleiben, ist $U|_W$ und somit auch S mit obiger Abbildungsvorschrift bereits G -invariant beschrieben. Demnach gilt $[S, \sigma] = 0$ für alle $\sigma \in G$, und das wiederum bedeutet, dass die beiden Eigenräume $E_{(2+\sqrt{5})}$ und $E_{(2-\sqrt{5})}$ von S unter allen $\sigma \in G$ erhalten bleiben, also invariant sind unter der Ikosaedergruppe G . \square

Analog zum Spielbeispiel im \mathbb{R}^2 , vgl. 1.2, wird als *Hilfsraum* F der Eigenraum $E_{(2+\sqrt{5})}$ gewählt, als *Projektionsraum* E der um einen dreidimensionalen Vektor $a \in F$ verschobene Eigenraum $E_{(2-\sqrt{5})}$, i. e.

$$(1.8) \quad F := E_{(2+\sqrt{5})} \quad \text{und} \quad E := E_{(2-\sqrt{5})} + a \quad \text{für ein } a \in F.$$

1.3.2. Die Inflationsmatrix S

Als Inflationsmatrix wählen wir die bereits bekannte Abbildung $S = 2I - U|_W$. Diese ist symmetrisch mit ganzzahligen Einträgen und daher wegen

$$(1.9) \quad \det S = (2 + \sqrt{5})^3 \cdot (2 - \sqrt{5})^3 = (\Phi^3)^3 \cdot (-\varphi^3)^3 = -1$$

auch ganzzahlig invertierbar. Wie in Beobachtung 1.4 gezeigt, bleiben die Eigenräume $E_{(2+\sqrt{5})}$ und $E_{(2-\sqrt{5})}$ von S unter der Ikosaedergruppe G erhalten. Ferner staucht S in Richtung des Projektionsraums E , da $-1 < (2 - \sqrt{5}) < 0$, und streckt in Richtung des Hilfsraums F , da $(2 + \sqrt{5}) > 1$. Die Abbildung S erfüllt somit alle Eigenschaften, die von einer Inflationsabbildung gefordert werden, vgl. [ER], für eine genaue Berechnung siehe wieder A.1.

1.3.3. Das Muster M_E im Projektionsraum E

Zur Erzeugung des dreidimensionalen Penrose-Musters wird nun, wie in 1.3.1 beschrieben, ein bestimmter Ausschnitt des Ausgangsraums $W \cong \mathbb{R}^6$ auf den dreidimensionalen Unterraum E projiziert. Das Muster M_E , das wir in diesem Fall erhalten, besteht demnach aus dreidimensionalen Pflastersteinen, welche die Projektionen der dreidimensionalen Seiten des sechsdimensionalen Einheitswürfels I^6 auf E sind.

Doch welche dreidimensionalen Seiten des sechsdimensionalen Einheitswürfels gibt es und wie sieht jeweils deren Projektion auf E aus? Wegen der Linearität der Projektionsabbildung sind diese Fragen äquivalent zu den folgenden Überlegungen:

1. Wie sieht die Projektion der Einheitsvektoren e_1, \dots, e_6 von W auf E aus, d. h. was ist $\pi_E(e_i)$ für $1 \leq i \leq 6$?
2. Welche unterschiedlichen Kombinationen von je drei projizierten Einheitsvektoren gibt es und wie sieht jeweils deren Aufspann aus?

Die Projektion der Einheitsvektoren des Ausgangsraums W auf E

Die gesuchte Projektion der Einheitsvektoren e_1, \dots, e_6 des Ausgangsraums W auf den Projektionsraum E des dreidimensionalen Penrose-Musters lässt sich mittels der Projektionsmatrix P berechnen:⁸

$$(1.10) \quad P = \frac{1}{-2\sqrt{5}}(S - (2 + \sqrt{5})I)$$

⁸Allgemein gilt: Ist M symmetrische Matrix mit Eigenwert a auf dem Eigenraum E und Eigenwert b auf dem Eigenraum $F = E^\perp$, dann kann die orthogonale Projektion auf E mit folgender Projektionsmatrix P berechnet werden: $P = \frac{1}{a-b}(M - bI)$, wobei I die entsprechende Einheitsmatrix ist.

1. Die Projektionsmethode

und mit $S = 2I - U|_W$ sowie der Bezeichnung $v_i := \pi_E(e_i) = P(e_i)$ folgt:

$$(1.11) \quad v_i = P(e_i) = \frac{1}{2\sqrt{5}}(U|_W(e_i) + \sqrt{5}e_i) = \frac{1}{2}(e_i + \Sigma_i),$$

wobei $\Sigma_i = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum \text{Nachbarecken}(e_i)$ und $1 \leq i \leq 6$, vgl. (1.6).

Beobachtung 1.5. Die Projektionen v_1, \dots, v_6 der Einheitsvektoren e_1, \dots, e_6 des Ausgangsraums W auf den Projektionsraum E sind wieder Ikosaederecken.

Beweis. Betrachten wir dazu $E \cong \mathbb{R}^3$ unter der Ikosaedergruppe G . Wegen $|G| = 60$ ist G endlich und deshalb gilt die bekannte Bahnengleichung

$$|Gx| \cdot |G_x| = |G| = 60,$$

wobei $Gx := \{g(x) | g \in G\}$ die *Bahn* – auch *Orbit* genannt – von $x \in E \cong \mathbb{R}^3$ unter der Operation der Gruppe G und $G_x := \{g \in G | g(x) = x\}$ der *Stabilisator* von $x \in E \cong \mathbb{R}^3$ ist. Ferner ist bekannt, dass die Eckpunkte des Ikosaeders eine einzige Bahn der Länge 12 bilden und es weitere Bahnen dieser Länge nicht gibt. Wegen obiger Bahnengleichung folgt somit: Jede der Ikosaederecken hat einen Stabilisator der Ordnung 5. Wollen wir also zeigen, dass $v_i \in E \cong \mathbb{R}^3$ für alle $1 \leq i \leq 6$ Ikosaederecken sind, so müssen wir nachweisen, dass $v_i \in E \cong \mathbb{R}^3$ für alle $1 \leq i \leq 6$ einen Stabilisator der Ordnung 5 besitzen, d. h. dass gilt $|G_{v_i}| = 5$ für alle $1 \leq i \leq 6$.

Dies soll in zwei Teilschritten geschehen: Als erstes zeigen wir $G_{v_i} = G_{e_i}$ und in einem zweiten Schritt dann $G_{e_i} = G_{a_i}$ für alle $1 \leq i \leq 6$. Damit ist obige Behauptung bewiesen, denn a_1, \dots, a_6 sind bekanntlich Ikosaederecken und somit gilt $|G_{a_i}| = 5$ und wegen den genannten Gleichheiten folglich auch $|G_{v_i}| = 5$ für alle $1 \leq i \leq 6$.

Teilschritt 1: $G_{v_i} = G_{e_i}$ für alle $1 \leq i \leq 6$

Da $E = E_{(2-\sqrt{5})} + a$ mit $a \in F$ folgt mit Beobachtung 1.4: $P \circ g = g \circ P$ für alle $g \in G$. Sei nun $g \in G_{e_i}$, d. h. $g(e_i) = e_i$ für alle $1 \leq i \leq 6$. Wegen $g(P(e_i)) = P(g(e_i)) = P(e_i)$ folgt $g \in G_{P(e_i)} = G_{v_i}$ und damit

$$G_{e_i} \subseteq G_{P(e_i)} = G_{v_i} \quad \text{für alle } 1 \leq i \leq 6.$$

G_{v_i} kann jedoch nicht echt größer sein, wie das folgende Argument zeigt:

Sei $P(e_i) = P(e_k)$ für $e_i, e_k \in \{e_1, \dots, e_6\}$. Mit (1.11) folgt daraus $e_i + \Sigma_i = e_k + \Sigma_k$, und diese Gleichheit ist nur für $e_i = e_k$ möglich. $P|_{\{e_1, \dots, e_6\}}$ ist damit injektiv und folglich gilt für alle $1 \leq i \leq 6$ die behauptete Gleichheit.

Teilschritt 2: $G_{e_i} = G_{a_i}$ für alle $1 \leq i \leq 6$

Weil (a_i, b_i) nach Konstruktion für alle $1 \leq i \leq 6$ Antipodenpaare bilden und die Stabilisatoren gegenüberliegender Ikosaederecken übereinstimmen, folgt wegen $e_i = a_i - b_i$

$$G_{a_i} \subseteq G_{a_i - b_i} = G_{e_i} \quad \text{für alle } 1 \leq i \leq 6.$$

Da die Differenz $a_i - b_i$ anschaulich aber für alle $1 \leq i \leq 6$ einer *gerichteten Diagonale* im Ikosaeder entspricht, kann ferner $G_{a_i - b_i}$ auch nicht echt größer sein als die Gruppe G_{a_i} selbst. Damit erhalten wir die behauptete Gleichheit. \square

Für das weitere Vorgehen ist es jedoch nicht nur wichtig zu wissen, dass v_1, \dots, v_6 Ikosaederecken sind, vielmehr interessiert auch die Anordnung dieser Ecken im Ikosaeder.

Beobachtung 1.6. *Die Ikosaederecken v_1, \dots, v_6 liegen allesamt in einem gemeinsamen Halbraum und genügen der folgenden Anordnung:*

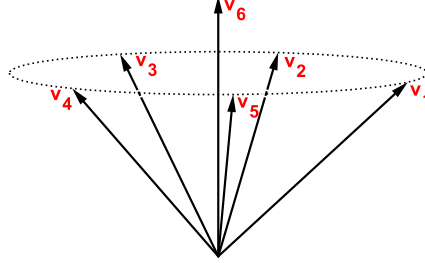


Abbildung 1.5.: Die Anordnung der Ikosaederecken v_1, \dots, v_6

Beweis. Bezeichnet c_5^6 die zyklische Gruppe c_5 , die die Ikosaederecken a_1, \dots, a_5 permutiert und a_6 festhält, dann gilt $G_{a_6} = c_5^6$ und mit Beobachtung 1.5 folgt $G_{v_6} = G_{a_6} = c_5^6$. Da die Ikosaederecken v_1, \dots, v_5 unter der Gruppe c_5^6 eine gemeinsame Bahn bilden und ganz allgemein jeder c_5 -Orbit in einer Ebene liegt, wissen wir, dass v_1, \dots, v_5 in einer gemeinsamen Ebene liegen. Für diese Ebene gibt es nun genau zwei Möglichkeiten: Entweder sie liegt in einem gemeinsamen Halbraum mit der Ikosaederecke v_6 oder nicht. Um dies entscheiden zu können, berechnen wir das Skalarprodukt $\langle v_1, v_6 \rangle$ mit Hilfe von (1.11). Σ_6 ist bereits aus Beobachtung 1.4 bekannt, für $\Sigma_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum \text{Nachbarecken}(e_1)$ gilt mit Hilfe von Abbildung 1.4:

$$\Sigma_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(e_2 - e_3 - e_4 + e_5 + e_6).$$

Bezüglich der Basis e_1, \dots, e_6 von W gelten somit die folgenden Vektordarstellungen:

$$\Sigma_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(0, 1, -1, -1, 1, 1) \quad \text{und} \quad \Sigma_6 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 1, 1, 1, 1, 0)$$

und damit folgt:

$$\begin{aligned} \langle v_1, v_6 \rangle &= \langle P(e_1), P(e_6) \rangle = \left\langle \frac{1}{2}(e_1 + \Sigma_1), \frac{1}{2}(e_6 + \Sigma_6) \right\rangle \\ &= \frac{1}{4}(\langle e_1, e_6 \rangle + \langle e_1, \Sigma_6 \rangle + \langle \Sigma_1, e_6 \rangle + \langle \Sigma_1, \Sigma_6 \rangle) \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{5}} > 0, \quad \text{denn } \langle e_1, e_6 \rangle = \langle \Sigma_1, \Sigma_6 \rangle = 0. \end{aligned}$$

Bezeichnet γ den Winkel zwischen v_1 und v_6 mit $0 < \gamma < 180^\circ$, so wissen wir wegen

$$\cos \gamma = \frac{\langle v_1, v_6 \rangle}{|v_1| \cdot |v_6|}$$

dass $\cos \gamma > 0$ und damit $0 < \gamma < 90^\circ$. Folglich liegen v_1 und v_6 in einem gemeinsamen Halbraum und somit auch v_6 und die gesamte Ebene, die v_1, \dots, v_5 enthält.

1. Die Projektionsmethode

Als ein letzter Punkt bleibt noch die Anordnung von v_1, \dots, v_5 auf dieser gemeinsamen Ebene zu klären. Nehmen wir dazu an, die Position von v_1 sei beliebig, aber fest, wie in Abbildung 1.6 gewählt: Welche der folgenden vier möglichen Positionen v_2^1 und v_2^2 sowie v_2^3 und v_2^4 nimmt dann die Ikosaederecke v_2 ein?

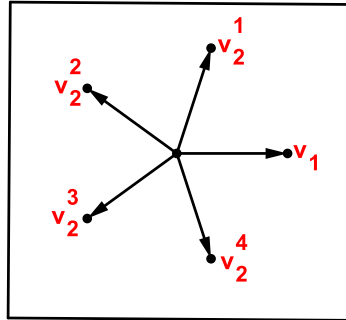


Abbildung 1.6.: Der Blick von oben auf die Ebene, in der die Ikosaederecken v_1, \dots, v_5 gemeinsam liegen, vgl. Abbildung 1.5

Da wir im Projektionsraum E als dreidimensionalem Unterraum des sechsdimensionalen Ausgangsraums W keine Orientierung mehr gegeben haben, sind die Positionen v_2^1 und v_2^4 sowie v_2^2 und v_2^3 jeweils nicht zu unterscheiden. O.B.d.A. bleibt damit zu klären: Nimmt v_2 Position v_2^1 ein oder Position v_2^2 ?

Diese Frage kann nun ebenfalls unter Verwendung des Skalarprodukts beantwortet werden. Für $\Sigma_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum \text{Nachbarecken}(e_2)$ gilt mit Hilfe von Abbildung 1.4 bezüglich der Basis e_1, \dots, e_6 von W folgende Vektordarstellung:

$$\Sigma_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 0, 1, -1, -1, 1)$$

und damit folgt:

$$\begin{aligned} \langle v_1, v_2 \rangle &= \langle P(e_1), P(e_2) \rangle = \left\langle \frac{1}{2}(e_1 + \Sigma_1), \frac{1}{2}(e_2 + \Sigma_2) \right\rangle \\ &= \frac{1}{4}(\langle e_1, e_2 \rangle + \langle e_1, \Sigma_2 \rangle + \langle \Sigma_1, e_2 \rangle + \langle \Sigma_1, \Sigma_2 \rangle) \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{5}}, \quad \text{denn } \langle e_1, e_2 \rangle = \langle \Sigma_1, \Sigma_2 \rangle = 0. \end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung, dass e_1, \dots, e_6 eine ONB-Basis von W bilden, gilt darüber hinaus für alle $1 \leq i \leq 6$:

$$\begin{aligned} |v_i| &= |P(e_i)| = \frac{1}{2}|e_i + \Sigma_i| \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{1}{5}((\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

und damit folgt für den Winkel γ zwischen v_1 und v_2 :

$$\cos \gamma = \frac{\langle v_1, v_2 \rangle}{|v_1| \cdot |v_2|} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

was nach den Berechnungen in A.2 genau dem Winkel zweier benachbarter Ikosaederecken entspricht, vgl. (A.3). Damit wissen wir, dass v_2 Position v_2^1 in Abbildung 1.6 einnimmt und wir erhalten insgesamt die Anordnung der Ikosaederecken v_1, \dots, v_6 wie in Abbildung 1.5 gezeigt. \square

Bemerkung. Entsprechend sind $-v_i = \pi_E(-e_i)$ für alle $1 \leq i \leq 6$ gerade die zu v_1, \dots, v_6 antipodalen Ikosaederecken. Im Folgenden wird daher zwischen den Begriffen (*projizierter*) *Einheitsvektor* $\pm v_i$ und *Ikosaederecke* $\pm v_i$ nicht mehr unterschieden!

Die Gestalt der Pflastersteine

Mit dem Wissen, dass die Projektionen $\pm v_i = \pm \pi_E(e_i)$ der Einheitsvektoren e_i des Ausgangsraums W auf E für alle $1 \leq i \leq 6$ Ikosaederecken sind, angeordnet wie in Abbildung 1.5 gezeigt, können wir auch die Frage beantworten, welche unterschiedlichen Kombinationen von je drei projizierten Einheitsvektoren es gibt und wie deren Aufspann jeweils aussieht, d. h. welche Gestalt die Pflastersteine im Fall des dreidimensionalen Penrose-Musters haben. Wir müssen dazu klären: Welche Kombinationen von je drei beliebigen Ikosaederecken existieren und wie sieht jeweils deren Aufspann aus?

Da die dreidimensionalen Seiten des sechsdimensionalen Einheitswürfels I^6 von je drei linear unabhängigen Einheitsvektoren im \mathbb{R}^6 aufgespannt werden, müssen die gesuchten Kombinationen von je drei Ikosaederecken ebenfalls linear unabhängig sein. Dies ist äquivalent zu der Forderung, dass Antipodenpaare nicht gemeinsam in einer solchen Ikosaederecken-Kombination vorkommen dürfen. Wegen der hohen Symmetrie des Ikosaeders, vgl. A.2, gibt es somit nur zwei verschiedene Lagebeziehungen, welche je zwei beliebige projizierte Einheitsvektoren v_i und v_k mit $v_i \neq v_k$ und $v_i, v_k \in \{\pm v_1, \dots, \pm v_6\}$ annehmen können: Entweder v_i und v_k sind *benachbarte Ikosaederecken*, wie z. B. v_1 und v_2 , oder aber v_i und v_k sind *übernächste Nachbarn* im Ikosaeder, wie z. B. v_1 und v_3 , vgl. Abbildung 1.5.

Für je drei nicht-antipodale Ikosaederecken ergeben sich damit die folgenden vier Kombinationsmöglichkeiten:

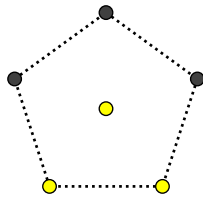
1. Drei paarweise benachbarte Ikosaederecken, z. B. v_3, v_4 und v_6
2. Zwei benachbarte Ikosaederecken und ein übernächster Nachbar, z. B. v_1, v_3 und v_6
3. Zwei übernächste Ikosaederecken und ein nächster Nachbar, z. B. v_1, v_2 und v_4
4. Drei paarweise übernächste Ikosaederecken, z. B. v_1, v_3 und $-v_2$

Stellen wir diese unterschiedlichen Kombinationsmöglichkeiten schematisch dar, so ergibt sich die folgende Situation: In den Abbildungen (a) bis (c) sind jeweils sechs in einem gemeinsamen Halbraum liegende Ikosaederecken zu sehen.⁹ In Abbildung (d) sind noch

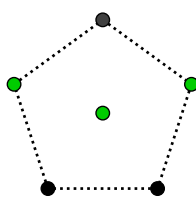
⁹Vgl. Abbildung 1.5: Wir blicken gewissermaßen von oben auf die dort abgebildete Eckenkonstellation!

1. Die Projektionsmethode

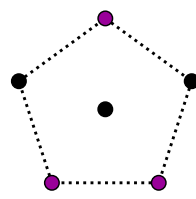
fünf der sechs antipodalen Ecken hinzugenommen. Die in den jeweiligen Kombinationen existierenden Ikosaederecken sind dabei farbig markiert:



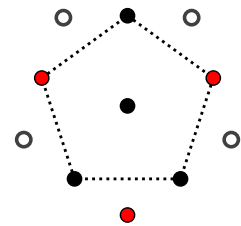
(a) Kombination 1



(b) Kombination 2



(c) Kombination 3



(d) Kombination 4

Was ist nun jeweils der Aufspann all dieser Kombinationen? Wir wollen schrittweise vorgehen und erst einmal den Aufspann zweier beliebiger Ikosaederecken betrachten. Für diesen gilt:

Beobachtung 1.7. *Der Aufspann zweier beliebiger, nicht-antipodaler Ikosaederecken hat die Gestalt einer Goldenen Raute.*

Beweis. Seien v_i und v_k zwei beliebige, nicht-antipodale Ikosaederecken mit $v_i \neq v_k$ und $v_i, v_k \in \{\pm v_1, \dots, \pm v_6\}$ und bezeichne α den Winkel zwischen zwei benachbarten Ikosaederecken sowie β den Winkel zwischen zwei übernächsten Ikosaederecken. Gemäß den gerade angestellten Vorüberlegungen und den Berechnungen in A.2 gibt es für v_i und v_k damit genau zwei Möglichkeiten:

$$(i) \ v_i \text{ und } v_k \text{ sind benachbarte Ikosaederecken} \xRightarrow{(A.3)} \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$(ii) \ v_i \text{ und } v_k \text{ sind übernächste Ikosaederecken} \xRightarrow{(A.4)} \cos \beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Da sich der Winkel α und der Winkel β nach Beobachtung A.1 stets zu 180° ergänzen, ist der Aufspann zweier beliebiger, nicht-antipodaler Ikosaederecken jedoch immer derselbe und hat die Gestalt einer Raute, wie Abbildung 1.7 zeigt.

Wegen $\cot(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1+\cos \alpha}{\sin \alpha}$ und $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ folgt für das Verhältnis der beiden Diagonalen dieser Raute:

$$\begin{aligned} \frac{\text{lange Diagonale}}{\text{kurze Diagonale}} &= \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}} = \cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 + \cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}} \\ &= \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{5}}}{\frac{2}{\sqrt{5}}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi. \end{aligned}$$

Die beiden Diagonalen teilen sich also gerade im Verhältnis des Goldenen Schnitts, daher wird diese Raute auch *Goldene Raute* (Golden Rhombus, siehe [C],[MT]) genannt.

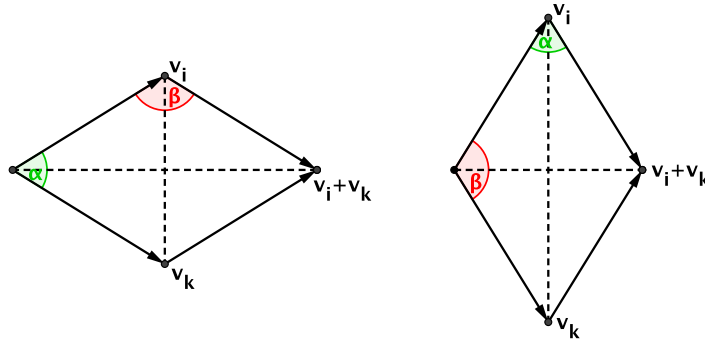


Abbildung 1.7.: Links der Aufspann der benachbarten Ikosaederecken v_i und v_k , siehe (i), sowie rechts der Aufspann der übernächsten Ikosaederecken v_i und v_k , siehe (ii)

□

Aus Beobachtung 1.7 ergibt sich für die Gestalt der Pflastersteine, d. h. für den dreidimensionalen Aufspann aller möglichen Kombinationen 1 bis 4, eine wichtige Folgerung:

Beobachtung 1.8. *Die Pflastersteine im Fall des dreidimensionalen Penrose-Musters sind allesamt gleichseitige Hexaeder, wobei die Grundseite dieser Hexaeder stets die Gestalt einer Goldenen Raute hat.*

Beweis. Der Aufspann von je drei beliebigen, nicht-antipodalen Ikosaederecken setzt sich zusammen aus dem Aufspann von jeweils zwei der gewählten drei Ikosaederecken. Nach Beobachtung 1.7 hat der Aufspann zweier beliebiger Ikosaederecken jedoch stets die Gestalt einer Goldenen Raute. Damit ist der Aufspann von je drei beliebigen Ikosaederecken ein gleichseitiges Hexaeder mit eben dieser Goldenen Raute als Grundseite. □

Die Fragen, die damit noch zu klären sind, lauten: Welche konkrete Gestalt kann dieses gleichseitige Hexaeder haben und entsteht aus den Kombinationsmöglichkeiten 1 bis 4 ein und dasselbe Hexaeder oder nicht?

Beobachtung 1.9. *Im Fall des dreidimensionalen Penrose-Musters existieren genau zwei verschiedene Sorten von Pflastersteinen, genannt langer und flacher Pflasterstein.*

Beweis. Um dies einzusehen, muss die Frage beantwortet werden, wie die drei Seitenflächen der Hexaeder, d. h. wie die drei Goldenen Rauten, in den Kombinationen 1 bis 4 jeweils an den Ecken zusammenkommen. Bezeichnet α wieder den Winkel zwischen zwei benachbarten Ikosaederecken und β den Winkel zwischen zwei übernächsten Ikosaedernachbarn, dann muss demnach geklärt werden, welche *Winkelkonstellationen* an den Ecken der Pflastersteine existieren, d. h. in welcher Kombination die Winkel α und β jeweils zusammentreffen.

Sehen wir uns dazu am Beispiel der drei paarweise benachbarten Einheitsvektoren v_3 und v_4 sowie v_6 an, welche Gestalt ein Pflasterstein besitzt, der ausgehend von Kombinationsmöglichkeit 1 realisiert wird.

1. Die Projektionsmethode

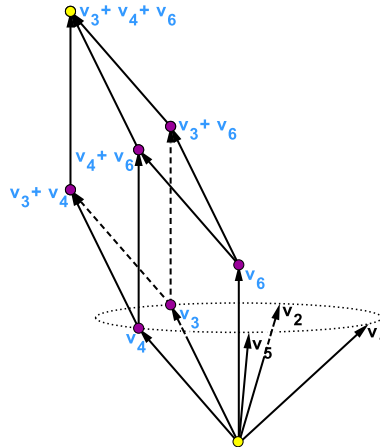


Abbildung 1.8.: Der Aufspann der drei paarweise benachbarten Ikosaederecken v_3 und v_4 sowie v_6 aus Kombination 1. Daneben realisiert aber auch Kombination 3 diesen Stein.

Mögliche Winkelkonstellationen:

- An den beiden gelben Ecken kommen die drei Goldenen Rauten jeweils mit dem Winkel α zusammen.
- An den sechs lila Ecken kommen die drei Goldenen Rauten jeweils einmal mit dem Winkel α und zweimal mit dem Winkel β zusammen.

Dieser Pflasterstein soll im Folgenden *langer Pflasterstein* (A_6 , siehe [C],[MT]) genannt werden. Die gelben Ecken bezeichnen wir als *spitze Ecken* und die lila Ecken als *stumpfe Ecken* des langen Steins.

Aber noch eine weitere Kombinationsmöglichkeit realisiert diesen Stein – dies sehen wir, indem wir unseren Standpunkt in Abbildung 1.8 verändern und als Ausgangsecke $v_4 + v_6$ wählen. Von dieser Ecke ausgehend existieren die drei Ikosaederecken v_4 und v_6 sowie $v_3 + v_4 + v_6$ und für deren Lagebeziehung gilt: v_4 und $v_3 + v_4 + v_6$ sowie v_6 und $v_3 + v_4 + v_6$ sind jeweils übernächste Ikosaederecken, v_4 und v_6 dagegen Nachbarecken. Dies entspricht nun genau der Situation, wie in Kombination 3 beschrieben, und daher realisiert diese Kombinationsmöglichkeit ebenfalls den langen Pflasterstein.

Damit bleibt noch die Gestalt der übrigen beiden Kombinationsmöglichkeiten zu klären. Wir betrachten dazu am Beispiel der Einheitsvektoren v_1 und v_3 sowie v_6 den Aufspann von Kombination 2, siehe Abbildung 1.9.

Mögliche Winkelkonstellationen:

- An den beiden roten Ecken kommen die drei Goldenen Rauten jeweils mit dem Winkel β zusammen.
- An den sechs grünen Ecken kommen die drei Goldenen Rauten jeweils zweimal mit dem Winkel α und einmal mit dem Winkel β zusammen.

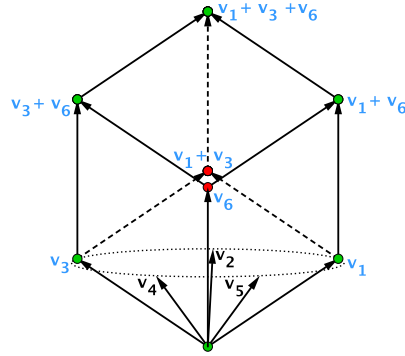


Abbildung 1.9.: Der Aufspann von v_1 und v_3 sowie v_6 aus Kombination 2: Die Ikosaederecken v_1 und v_6 sowie v_3 und v_6 sind jeweils paarweise benachbart, v_1 und v_3 dagegen sind übernächste Nachbarn im Ikosaeder. Daneben realisiert aber auch Kombination 4 diesen Stein.

An den acht Ecken dieses gleichseitigen Hexaeders finden sich somit andere Winkelkonstellationen als im Fall des langen Pflastersteins, was bedeutet, dass eine zweite Sorte von Hexaeder und damit ein weiterer Pflasterstein existiert. Diesen wollen wir entsprechend seiner Gestalt *flachen Pflasterstein* (O_6 , siehe [C],[MT]) nennen und die grünen Ecken als *spitze Ecken* sowie die roten Ecken als *stumpfe Ecken* des flachen Steins bezeichnen. Wie im Fall des langen Pflastersteins realisiert aber auch hier noch eine weitere Kombinationsmöglichkeit diesen Stein. Ein Wechsel des Standpunktes in Abbildung 1.9 macht dies wieder deutlich: Wird als Ausgangsecke $v_1 + v_3$ gewählt, existieren von dieser Ecke ausgehend die Ikosaederecken v_1 und v_3 sowie $v_1 + v_3 + v_6$, welche paarweise übernächste Nachbarn im Ikosaeder sind. Dies entspricht genau der Situation im Fall von Kombination 4 und folglich realisiert diese ebenfalls den flachen Pflasterstein. Insgesamt erhalten wir damit die folgenden beiden Pflastersteine:

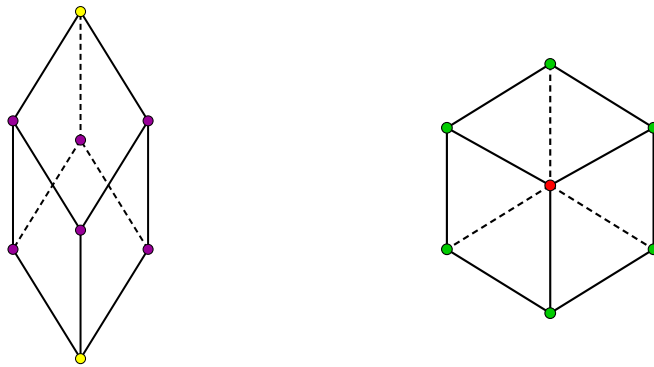


Abbildung 1.10.: Die beiden Pflastersteine im Fall des dreidimensionalen Penrose-Musters: Links der lange Stein und rechts der flache Stein. Zu beachten ist, dass in der Darstellung des flachen Pflastersteins die beiden roten Ecken zusammenfallen.

□

1. Die Projektionsmethode

Bemerkung. Im Folgenden wird eine schematische Darstellung der Pflastersteine wichtig sein. Wir ergänzen hierfür die Abbildungen (a) – (d) von Seite 12:

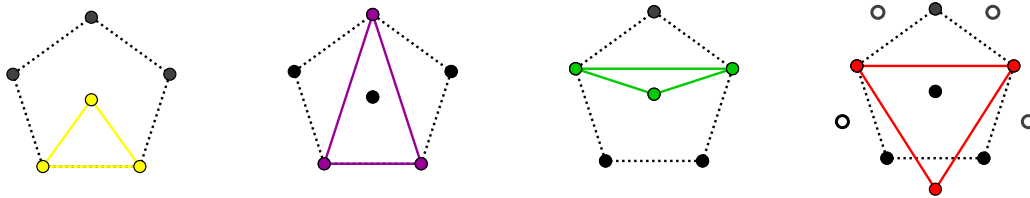


Abbildung 1.11.: Die schematische Darstellung der Pflastersteine

Die Ikosaederecken in Abbildung 1.11 entsprechen den Einheitsrichtungen im dreidimensionalen Raum, die Verbindung zwischen zwei Ecken gerade der Raute, welche von diesen beiden Ikosaederecken im Raum aufgespannt wird. Von links nach rechts sehen wir somit den langen Pflasterstein, ausgehend von einer spitzen Ecke, vgl. Kombination 1, und den langen Stein, ausgehend von einer stumpfen Ecke, vgl. Kombination 3, sowie den flachen Pflasterstein, ausgehend von einer spitzen Ecke, vgl. Kombination 2, und den flachen Stein, ausgehend von einer stumpfen Ecke, vgl. Kombination 4.

1.3.4. Das Fenster V im Hilfsraum F

In 1.2 haben wir gesehen, dass der offene Streifen $E + I^2 \subset \mathbb{R}^2$ auch mit Hilfe der orthogonalen Projektion π_F auf die Hilfsgerade F beschrieben werden kann: $E + I^2 = E + V$, wobei $V = \pi_F(I^2) \subset \mathbb{R}$, siehe (1.2). Der Gewinn dieser alternativen Streifenbeschreibung wird nun im Fall des dreidimensionalen Penrose-Musters offensichtlich, i. e.

$$(1.12) \quad E + I^6 = E + V \quad \text{mit } V := \pi_F(I^6).$$

Während hier der offene Streifen $E + I^6 \subset \mathbb{R}^6$ unserer räumlichen Vorstellung längst nicht mehr zugänglich ist, gilt $V = \pi_F(I^6) \subset \mathbb{R}^3$, was dagegen anschaulich durchaus noch nachzuvollziehen ist! Der Übergang von $E + I^6$ zu $E + V$ reduziert also die zu betrachtenden Dimensionen und ermöglicht es uns, statt im \mathbb{R}^6 im dreidimensionalen Hilfsraum F zu arbeiten.¹⁰ Was aber ist die Gestalt des Fensters V ?

Hierzu betrachten wir die folgende symmetrische Beschreibung Z des sechsdimensionalen Einheitswürfels:

$$(1.13) \quad Z = \{(x_1, \dots, x_6) | x_i \in [-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}] \text{ für alle } 1 \leq i \leq 6\}.$$

¹⁰Vorsicht bezüglich der Notationen: Bei den Beispielbetrachtungen im \mathbb{R}^2 sind E und F jeweils Geraden, daher ist $V = \pi_F(I^2) \subset \mathbb{R}$ eindimensional. Im Fall des dreidimensionalen Penrose-Musters ist der Ausgangsraum W dagegen sechsdimensional, der Projektionsraum E sowie der Hilfsraum F sind jeweils dreidimensional. Der Anschaulichkeit halber wird aber auch $E + I^6$ als Streifen bezeichnet.

Ecken des sechsdimensionalen Einheitswürfels sind somit alle Punkte $x_{Ecke} \in \mathbb{R}^6$ mit:

$$(1.14) \quad x_{Ecke} = \frac{1}{2}(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1),$$

und die Anzahl der Eckpunkte x_{Ecke} von Z ist folglich $2^6 = 64$.

Das dreidimensionale Fenster V als Projektion des konvexen sechsdimensionalen Einheitswürfels Z auf den Hilfsraum F ist nun selbst ein konvexes Polyeder, dessen Ecken gerade Projektionen der Eckpunkte von Z auf F sind. Wollen wir also die Ecken von V ermitteln, so müssen wir in einem ersten Schritt $\pi_F(x_{Ecke})$ für alle 64 Eckpunkte x_{Ecke} von Z bestimmen – das sind alle *potentiell möglichen* Ecken des Fensters V .

In einem zweiten Schritt sind dann unter diesen 64 potentiell möglichen Eckpunkten $\pi_F(x_{Ecke})$ genau diejenigen zu ermitteln, die auch wirklich das konvexe Polyeder V aufspannen und nicht in dessen Innerem liegen. Mit Hilfe dieser Ergebnisse, der Kenntnis der *tatsächlichen* Ecken von V , kann schließlich auch die Frage nach der Gestalt des Fensters V beantwortet werden!

Die Projektion der Einheitsvektoren des Ausgangsraums W auf F

Mit der Bezeichnung $\pm w_i := \pi_F(\pm e_i)$ für alle $1 \leq i \leq 6$ und wegen der Linearität der Projektionsabbildung gilt bezüglich der Basis e_1, \dots, e_6 von W :

$$(1.15) \quad \pi_F(x_{Ecke}) = \frac{1}{2}\pi_F(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1) = \frac{1}{2}\pi_F \sum_{i=1}^6 (\pm e_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 (\pm w_i).$$

Das bedeutet, dass alle 64 potentiell möglichen Ecken des Fensters V Summen sind, gebildet aus den projizierten Einheitsvektoren $\pm w_1, \dots, \pm w_6$. Im Folgenden müssen wir daher für alle $1 \leq i \leq 6$ diese Projektion der Einheitsvektoren e_i des Ausgangsraums W auf den Hilfsraum F bestimmen. Dazu können wir auf die Überlegungen in 1.3.3 zurückgreifen. Entsprechend der Bemerkung in Fußnote 8 gilt in diesem Fall für die gesuchte Projektionsmatrix Q :

$$(1.16) \quad Q = \frac{1}{2\sqrt{5}}(S - (2 - \sqrt{5})I)$$

und mit $S = 2I - U|_W$ sowie $w_i = \pi_F(e_i) = Q(e_i)$ folgt:

$$(1.17) \quad w_i = Q(e_i) = \frac{1}{2\sqrt{5}}(-U|_W(e_i) + \sqrt{5}e_i) = \frac{1}{2}(e_i - \Sigma_i),$$

wobei wieder $\Sigma_i = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum \text{Nachbarecken}(e_i)$ und $1 \leq i \leq 6$, vgl. (1.11). Ebenso gilt:

Beobachtung 1.10. Die Projektionen w_1, \dots, w_6 der Einheitsvektoren e_1, \dots, e_6 des Ausgangsraums W auf den Hilfsraum F sind wieder Ikosaederecken.

Beweis. Der Beweis ist völlig analog zu dem von Beobachtung 1.5: Wollen wir zeigen, dass $w_i \in F \cong \mathbb{R}^3$ für alle $1 \leq i \leq 6$ Ikosaederecken sind, so müssen wir wieder nachweisen, dass $w_i \in F \cong \mathbb{R}^3$ für alle $1 \leq i \leq 6$ einen Stabilisator der Ordnung 5 besitzen, d. h.

1. Die Projektionsmethode

dass gilt $|G_{w_i}| = 5$ für alle $1 \leq i \leq 6$.

Wegen der speziellen Wahl von F als Eigenraum von S gilt mit Beobachtung 1.4 ebenfalls $Q \circ g = g \circ Q$ für alle $g \in G$ und damit

$$G_{e_i} \subseteq G_{Q(e_i)} = G_{w_i} \quad \text{für alle } 1 \leq i \leq 6.$$

G_{w_i} kann jedoch nicht echt größer sein als G_{e_i} , denn auch $Q|_{\{e_1, \dots, e_6\}}$ ist injektiv und folglich gilt die Gleichheit $G_{e_i} = G_{w_i}$ für alle $1 \leq i \leq 6$.

Die restlichen Folgerungen können direkt aus dem Beweis zu 1.5 übernommen werden. \square

Neben dem Wissen, dass w_1, \dots, w_6 Ikosaederecken sind, interessiert aber auch in diesem Fall deren genaue Anordnung im Hilfsraum F , und hier gibt es nun zwei entscheidende Unterschiede im Vergleich zur Anordnung der Ikosaederecken v_1, \dots, v_6 im Projektionsraum E . Es ist daher im Folgenden genau zu unterscheiden, ob man die Projektion der Einheitsvektoren e_1, \dots, e_6 von W auf E oder auf F betrachtet!

Beobachtung 1.11. *Die Ikosaederecken w_1, \dots, w_5 liegen allesamt nicht in einem gemeinsamen Halbraum mit der Ikosaederecke w_6 und es gilt die folgende Anordnung:*

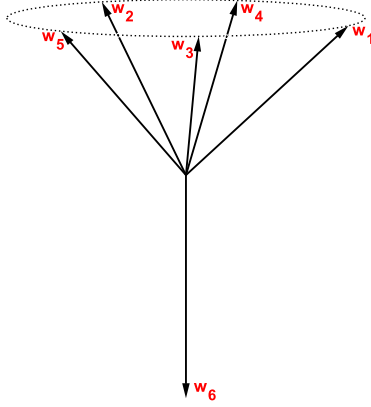


Abbildung 1.12.: Die Anordnung der Ikosaederecken w_1, \dots, w_6

Beweis. Mit den gleichen Argumenten wie im Beweis zu Beobachtung 1.6 folgt auch hier, dass w_1, \dots, w_5 in einer gemeinsamen Ebene liegen, für welche es wieder genau zwei Möglichkeiten gibt: Entweder diese Ebene liegt in einem gemeinsamen Halbraum mit der Ikosaederecke w_6 oder nicht.

Um diese Frage klären zu können, berechnen wir das Skalarprodukt $\langle w_1, w_6 \rangle$. Mit Hilfe von (1.17) und dem Wissen aus dem Beweis zu Beobachtung 1.6 folgt:

$$\begin{aligned} \langle w_1, w_6 \rangle &= \langle Q(e_1), Q(e_6) \rangle = \left\langle \frac{1}{2}(e_1 - \Sigma_1), \frac{1}{2}(e_6 - \Sigma_6) \right\rangle \\ &= \frac{1}{4}(\langle e_1, e_6 \rangle - \langle e_1, \Sigma_6 \rangle - \langle \Sigma_1, e_6 \rangle + \langle \Sigma_1, \Sigma_6 \rangle) \\ &= \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{1}{2\sqrt{5}} < 0, \quad \text{denn } \langle e_1, e_6 \rangle = \langle \Sigma_1, \Sigma_6 \rangle = 0. \end{aligned}$$

Bezeichnet γ nun den Winkel zwischen w_1 und w_6 mit $0 < \gamma < 180^\circ$, so wissen wir wegen

$$\cos \gamma = \frac{\langle w_1, w_6 \rangle}{|w_1| \cdot |w_6|}$$

dass $\cos \gamma < 0$ und damit $90^\circ < \gamma < 180^\circ$. Folglich liegen w_1 und w_6 gerade nicht in einem gemeinsamen Halbraum und somit auch nicht w_6 und die gesamte Ebene, die w_1, \dots, w_5 enthält.

Damit bleibt abschließend noch die Anordnung der Ikosaederecken w_1, \dots, w_5 auf der gemeinsamen Ebene zu klären. Nehmen wir dazu wieder an, die Position von w_1 sei beliebig, aber fest:

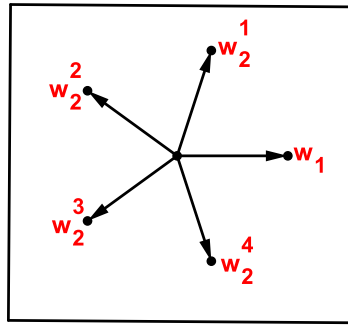


Abbildung 1.13.: Der Blick von oben auf die Ebene, in der die Ikosaederecken w_1, \dots, w_5 gemeinsam liegen, vgl. Abbildung 1.12

Auch im Hilfsraum F können auf Grund der fehlenden Orientierung im Ausgangsraum W die Positionen w_2^1 und w_2^4 sowie w_2^2 und w_2^3 , welche w_2 allesamt annehmen kann, nicht mehr unterschieden werden. O. B. d. A. stellt sich demnach wieder die Frage: Nimmt w_2 Position w_2^1 oder Position w_2^2 an?

Um das zu klären, wollen wir in diesem Fall das Skalarprodukt $\langle w_1, w_2 \rangle$ berechnen:

$$\begin{aligned} \langle w_1, w_2 \rangle &= \langle Q(e_1), Q(e_2) \rangle = \left\langle \frac{1}{2}(e_1 - \Sigma_1), \frac{1}{2}(e_2 - \Sigma_2) \right\rangle \\ &= \frac{1}{4} (\langle e_1, e_2 \rangle - \langle e_1, \Sigma_2 \rangle - \langle \Sigma_1, e_2 \rangle + \langle \Sigma_1, \Sigma_2 \rangle) \\ &= \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \right) = -\frac{1}{2\sqrt{5}}, \quad \text{denn } \langle e_1, e_2 \rangle = \langle \Sigma_1, \Sigma_2 \rangle = 0. \end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung, dass e_1, \dots, e_6 eine ONB-Basis von W bilden, gilt auch hier für alle $1 \leq i \leq 6$:

$$|w_i| = |Q(e_i)| = \frac{1}{2}|e_i - \Sigma_i| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

und damit folgt für den Winkel γ zwischen w_1 und w_2 :

$$\cos \gamma = \frac{\langle w_1, w_2 \rangle}{|w_1| \cdot |w_2|} = -\frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{2\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}},$$

1. Die Projektionsmethode

was genau dem Winkel zweier übernächster Nachbarn im Ikosaeder entspricht, vgl. (A.4). Das bedeutet, dass w_2 in Abbildung 1.13 Position w_2^2 einnimmt und sich insgesamt die Anordnung der Ikosaederecken w_1, \dots, w_6 wie in Abbildung 1.12 gezeigt ergibt. \square

Bemerkung. Analog zur Projektion der Einheitsvektoren auf E , vgl. die Bemerkung auf Seite 11, sind $-w_i = \pi_F(-e_i)$ für alle $1 \leq i \leq 6$ wieder die zu w_1, \dots, w_6 antipodalen Ikosaederecken und wir wollen auch hier die Begriffe (*projizierter*) *Einheitsvektor* $\pm w_i$ und *Ikosaederecke* $\pm w_i$ nicht mehr unterscheiden!

Fasst man alle Ergebnisse zusammen, so bedeutet das für die 64 potentiell möglichen Ecken $\pi_F(x_{Ecke})$ des Fensters V : Es sind allesamt Summen, gebildet aus den Ikosaederecken $\pm w_1, \dots, \pm w_6$. Doch welche dieser Ecken sind nun auch tatsächlich Ecken des konvexen Polyeders V ? Wir müssen dazu klären: Welche der Summen

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 (\pm w_i)$$

sind maximal und spannen folglich das Fenster V auch wirklich auf? Diese Summen sollen im Folgenden *maximale Summen* genannt und mit \mathcal{S}_{max} bezeichnet werden. Die Ecken im Inneren von V nennen wir entsprechend *minimale Summen* und bezeichnen diese mit \mathcal{S}_{min} .

Die Suche nach den tatsächlichen Fensterecken

Auf Grund der Tatsache, dass $\pm w_1, \dots, \pm w_6$ Ikosaederecken sind, angeordnet wie in Abbildung 1.12 gezeigt, kann die Frage, welche der eben genannten Summen \mathcal{S} maximal sind, mit Hilfe der Ikosaedergeometrie anschaulich gelöst werden. Eine erste Sorte maximaler Summen ist dabei sofort ersichtlich:

Beobachtung 1.12. Eine erste Sorte \mathcal{S}_{max}^1 maximaler Summen ist für alle $\pm w_i$ mit $1 \leq i \leq 6$ von der Form

$$\mathcal{S}_{max}^1 = \frac{1}{2} (w_i + \sum \text{Nachbarecken}(w_i)) = \Phi w_i \quad \text{und} \quad |\mathcal{S}_{max}^1| = 12.$$

Beweis. Anschaulich gesprochen meint diese Formel die Addition einer beliebigen Ikosaederecke zu ihren fünf direkten Nachbarecken, d. h. die Addition von sechs Ikosaederecken, welche in einem gemeinsamen Halbraum liegen. Es ist völlig klar, dass diese Summe maximal ist, denn sechs beliebige Ikosaederecken können nicht näher beisammen liegen, also die eben genannten sechs eines Halbraums!

Mittels der Projektionsmatrix Q , vgl. (1.16), kann man die einzelnen Summen nun sogar explizit berechnen. Exemplarisch soll dies hier für $w_i = -w_6$ gezeigt werden, siehe auch A.1. Mit $\Sigma_6 = \frac{1}{\sqrt{5}}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5)$ und der Linearität der Projektionsabbildung

folgt:

$$\begin{aligned}
 Q(\Sigma_6) &= \frac{1}{\sqrt{5}}(Q(e_1) + Q(e_2) + Q(e_3) + Q(e_4) + Q(e_5)) \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{5}}((e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5) - (\Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 + \Sigma_4 + \Sigma_5)) \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{5}}(\sqrt{5}\Sigma_6 - \frac{1}{\sqrt{5}}(5e_6)) = \frac{1}{2\sqrt{5}}(\sqrt{5}\Sigma_6 - \sqrt{5}e_6) = -w_6.
 \end{aligned}$$

Mit Hilfe von Abbildung 1.12 erhalten wir damit:

$$\begin{aligned}
 \sum \text{Nachbarecken}(-w_6) &= \sum_{i=1}^5 w_i = \sum_{i=1}^5 Q(e_i) = Q\left(\sum_{i=1}^5 e_i\right) \\
 &= Q(\sqrt{5}\Sigma_6) = \sqrt{5}Q(\Sigma_6) = \sqrt{5}(-w_6) = -\sqrt{5}w_6
 \end{aligned}$$

und folglich gilt für die gesuchte maximale Summe \mathcal{S}_{max}^1 im Fall von $-w_6$:

$$\frac{1}{2}(-w_6 + \sum \text{Nachbarecken}(-w_6)) = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{5})w_6 = -\Phi w_6.$$

Die Rechnungen für alle übrigen Fälle gestalten sich analog und deshalb ist ganz allgemein:

$$\frac{1}{2}(w_i + \sum \text{Nachbarecken}(w_i)) = \frac{1}{2}(w_i + \sqrt{5}w_i) = \Phi w_i \quad \text{für alle } w_i \in \{\pm w_1, \dots, \pm w_6\}.$$

Da von jeder der 12 Ikosaederecken ausgehend nun genau eine solche maximale Summe \mathcal{S}_{max}^1 gebildet werden kann, folgt $|\mathcal{S}_{max}^1| = 12$. \square

Mit \mathcal{S}_{max}^1 haben wir eine erste Sorte maximaler Summen gefunden und wir kennen damit 12 Ecken, die das Fenster V auch tatsächlich aufspannen. Doch existieren darüber hinaus weitere Ecken von V ? Oder mit anderen Worten: Existieren neben \mathcal{S}_{max}^1 noch weitere Sorten maximaler Summen?

Angenommen, dies ist nicht der Fall, dann wäre die Gestalt des konvexen Polyeders V bereits bekannt: Ein Ikosaeder mit den Eckpunkten $\pm\Phi w_1, \dots, \pm\Phi w_6$. Wie aber können wir die Frage nach weiteren maximalen Summen klären? Hierzu blicken wir noch einmal auf die Überlegungen zurück, die zu \mathcal{S}_{max}^1 geführt haben: Zu einer beliebigen Ikosaederecke wurden die fünf Nachbarecken addiert. Sollte es also noch (mindestens) eine zweite Sorte \mathcal{S}_{max}^2 maximaler Summen geben, so entsteht diese sicherlich durch Anwendung des folgenden Additionsprinzips:

Additionsprinzip 1.13. *Zu einer beliebigen Ikosaederecke werden vier der fünf Nachbarecken addiert und anstelle der nicht-addierten fünften Nachbarecke deren Antipodenpunkt.*

Wie ist dieses Additionsprinzip zu verstehen? Betrachten wir hierzu exemplarisch wieder $w_i = -w_6$, so besitzen mit Hilfe der Ergebnisse aus dem Beweis zu Beobachtung 1.12

1. Die Projektionsmethode

beispielsweise die folgenden Summen soeben beschriebene Grundform:

Beispiel 1: Zu der Ikosaederecke $-w_6$ werden die vier Nachbarecken $+w_1$ und $+w_2$ sowie $+w_3$ und $+w_4$ sowie der Antipodenpunkt $-w_5$ der nicht-addierten fünften Nachbarecke $+w_5$ addiert:

$$\frac{1}{2}(-w_6 + w_1 + w_2 + w_3 + w_4 - w_5) = \frac{1}{2}(-w_6 + \sum \text{Nachbarecken}(-w_6) - 2w_5) = -\Phi w_6 - w_5.$$

Beispiel 2: Zu der Ikosaederecke $-w_6$ werden die vier Nachbarecken $+w_1$ und $+w_2$ sowie $+w_3$ und $+w_5$ sowie der Antipodenpunkt $-w_4$ der nicht-addierten fünften Nachbarecke $+w_4$ addiert:

$$\frac{1}{2}(-w_6 + w_1 + w_2 + w_3 + w_5 - w_4) = \frac{1}{2}(-w_6 + \sum \text{Nachbarecken}(-w_6) - 2w_4) = -\Phi w_6 - w_4.$$

Mittels elementargeometrischer Überlegungen kann man überprüfen, ob diese zweite Sorte von Summen aber auch wirklich maximale Summen sind. Es gilt:

Beobachtung 1.14. Die Summen, die durch Anwendung von Additionsprinzip 1.13 entstehen, bilden eine zweite Sorte \mathcal{S}_{max}^2 maximaler Summen.

Beweis. Um herauszufinden, ob die durch Additionsprinzip 1.13 beschriebene Sorte von Summen ebenfalls maximale Summen sind, müssen wir prüfen, ob beispielsweise die soeben berechnete Summe $\frac{1}{2}(-w_6 + w_1 + w_2 + w_3 + w_4 - w_5) = -\Phi w_6 - w_5$ im Inneren des Aufspans der bereits ermittelten 12 tatsächlichen Ecken des Fensters V liegt, d. h. im Inneren des Ikosaeders mit den Eckpunkten $\pm\Phi w_1, \dots, \pm\Phi w_6$, oder nicht.¹¹ Mit Hilfe von Abbildung 1.14 ist demnach zu klären, welche konkreten Werte die beiden Winkel α und η annehmen.

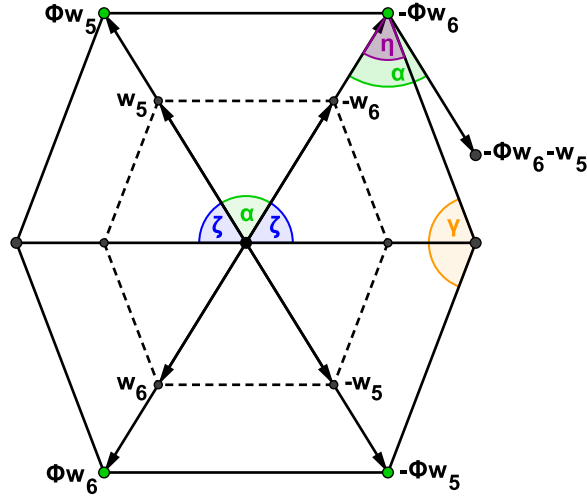


Abbildung 1.14.: Ein Blick auf den Querschnitt durch den Ikosaeder mit den Eckpunkten $\pm\Phi w_1, \dots, \pm\Phi w_6$ zeigt: Der Punkt $-\Phi w_6 - w_5$ liegt außerhalb dieses Ikosaeders.

¹¹Der hier durchgeführte Beweis gilt analog natürlich auch für $-\Phi w_6 - w_4$ sowie alle weiteren Summen der zweiten Sorte.

Die Ikosaederecken Φw_5 und $-\Phi w_6$ sind benachbart und für den Winkel α zwischen benachbarten Ikosaederecken gilt nach (A.5):

$$\alpha = 63,43^\circ.$$

In Abbildung 1.14 sehen wir: $\alpha + 2\zeta = 180^\circ$. Andererseits gilt nach Beobachtung A.1 jedoch auch $\alpha + \beta = 180^\circ$, wobei $\beta = 116,57^\circ$ den Winkel zwischen zwei übernächsten Ikosaederecken bezeichnet, siehe wieder (A.5), und folglich ist

$$\zeta = \frac{1}{2}\beta = 58,285^\circ.$$

Der Winkel γ entspricht gerade dem Winkel zwischen zwei aneinanderliegenden Seitenflächen des Ikosaeders, wie in (A.6) berechnet: $\gamma = 138,18^\circ$. Damit erhält man für den Winkel η :

$$\eta = 180^\circ - (\zeta + \frac{1}{2}\gamma) = 180^\circ - (58,285^\circ + 69,09^\circ) = 52,625^\circ.$$

Wegen $\eta < \alpha$ liegt der Punkt $-\Phi w_6 - w_5$ folglich nicht im Inneren des Ikosaeders mit den Eckpunkten $\pm\Phi w_1, \dots, \pm\Phi w_6$ und somit existiert tatsächlich eine zweite Sorte \mathcal{S}_{max}^2 maximaler Summen.

□

Was noch zu klären bleibt ist die Frage: Wie viele solcher maximaler Summen der zweiten Sorte gibt es? In diesem Fall ist die Antwort nicht ganz so offensichtlich wie im Fall von \mathcal{S}_{max}^1 .

Beobachtung 1.15. *Es gibt genau 20 verschiedene maximale Summen der zweiten Sorte, die durch Anwendung von Additionsprinzip 1.13 entstehen, d. h. es gilt $|\mathcal{S}_{max}^2| = 20$.*

Beweis. Theoretisch können wir Additionsprinzip 1.13 auf jede der 12 Ikosaederecken anwenden, und zwar auf jeweils fünf verschiedene Weisen. Demnach ist $|\mathcal{S}_{max}^2| = 12 \cdot 5 = 60$ und folglich $|\mathcal{S}_{max}^1| + |\mathcal{S}_{max}^2| = 12 + 60 = 72$, was jedoch im Widerspruch dazu steht, dass es insgesamt überhaupt nur 64 potentiell mögliche Fensterecken gibt! Die Frage, die sich daher stellt, lautet: Welche dieser 60 theoretisch möglichen Summen des Typs \mathcal{S}_{max}^2 fallen praktisch zusammen?

Auch hierzu muss wieder der Ikosaeder und seine Geometrie genauer betrachtet werden. Abbildung 1.14 zeigt: $-\Phi w_6 - w_5$ liegt oberhalb einer der 20 Ikosaederflächen. Zeichnen wir dieses Bild einmal perspektivisch, so sehen wir genauer: Der Punkt $-\Phi w_6 - w_5$ liegt oberhalb des Dreiecks mit den Eckpunkten $-\Phi w_6$ und $+\Phi w_1$ sowie $+\Phi w_4$, siehe Abbildung 1.15. Können wir folglich zu eben diesem Punkt $-\Phi w_6 - w_5$ nicht auch gelangen, indem wir Additionsprinzip 1.13 nicht auf die Ikosaederecke $-w_6$, sondern stattdessen auf eine der beiden Ikosaederecken $+w_1$ bzw. $+w_4$ anwenden? Das würde bedeuten, dass je drei theoretisch mögliche Summen des Typs \mathcal{S}_{max}^2 in Wirklichkeit zusammenfallen!

1. Die Projektionsmethode

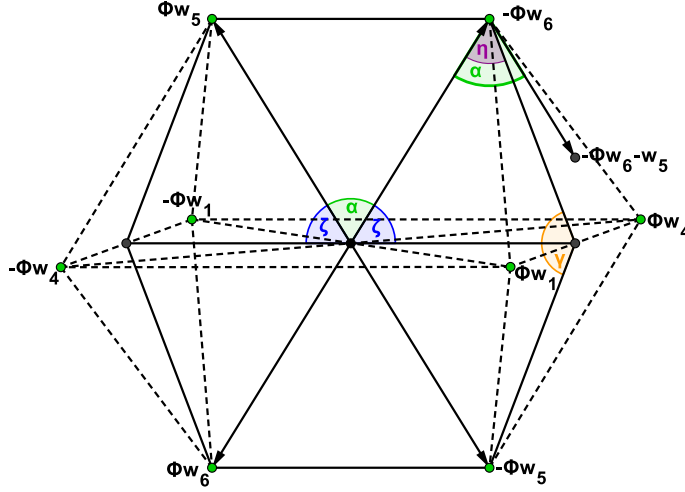


Abbildung 1.15.: Die perspektivische Darstellung von Abbildung 1.14 zeigt: Der Punkt $-\Phi w_6 - w_5$ liegt oberhalb des Dreiecks mit den Eckpunkten $-\Phi w_6$ und $+\Phi w_1$ sowie $+\Phi w_4$.

Diese Überlegungen sind in der Tat richtig, wie die folgenden Gleichheiten zeigen. Addieren wir zur Ikosaederecke $+w_1$ die vier Nachbarecken $+w_3$ und $+w_4$ sowie $-w_5$ und $-w_6$ sowie den Antipodenpunkt $+w_2$ der nicht-addierten fünften Nachbarecke $-w_2$, vgl. Abbildung 1.12, so erhalten wir:

$$\frac{1}{2}(w_1 + w_3 + w_4 - w_5 - w_6 + w_2) = \frac{1}{2}\left(w_1 + \sum \text{Nachbarecken}(w_1) - 2w_2\right) = +\Phi w_1 + w_2.$$

Analog dazu ergibt die Addition der vier Nachbarecken $+w_1$ und $+w_2$ sowie $-w_5$ und $-w_6$ sowie des Antipodenpunktes $+w_3$ der nicht-addierten fünften Nachbarecke $-w_3$ zu der Ikosaederecke $+w_4$:

$$\frac{1}{2}(w_4 + w_1 + w_2 - w_5 - w_6 + w_3) = \frac{1}{2}\left(w_4 + \sum \text{Nachbarecken}(w_4) - 2w_3\right) = +\Phi w_4 + w_3.$$

Ferner ist aus Beispiel 1 auf Seite 22 bereits bekannt:

$$\frac{1}{2}(-w_6 + w_1 + w_2 + w_3 + w_4 - w_5) = -\Phi w_6 - w_5,$$

und ein Vergleich der drei ausgeschriebenen Summen ergibt damit die Gleichheit:

$$(1.18) \quad -\Phi w_6 - w_5 = +\Phi w_4 + w_3 = +\Phi w_1 + w_2.$$

Wir haben somit für ein und denselben Punkt im Hilfsraum $F \cong \mathbb{R}^3$ drei formal unterschiedliche Schreibweisen zur Verfügung. Weil diese Art von Überlegung nun aber für jede der 60 theoretisch möglichen Summen der zweiten Sorte angestellt werden kann, fallen damit praktisch, wie bereits oben erwähnt, je drei dieser Summen zusammen. Die Anzahl von \mathcal{S}_{max}^2 ist demnach nur noch $(12 \cdot 5) : 3 = 20$, d. h. $|\mathcal{S}_{max}^2| = 20$. □

Bemerkung. Die drei in (1.18) genannten formal unterschiedlichen Schreibweisen ein und desselben Punktes machen gerade deutlich, welche der drei möglichen Ikosaederecken $+w_1$ und $+w_4$ sowie $-w_6$ als Ausgangsecke für das beschriebene Additionsprinzip 1.13 gewählt wurde!

Mit Hilfe der Beobachtungen 1.12 und 1.15 ist damit bekannt, dass das konvexe Polyeder V wegen

$$|\mathcal{S}_{max}^1| + |\mathcal{S}_{max}^2| = 12 + 20 = 32$$

mindestens 32 Ecken besitzt. Gibt es darüber hinaus aber noch weitere maximale Summen? Was wäre der Aufspann all dieser 32 Punkte? Die erste Frage kann dank der bisherigen Überlegungen relativ schnell beantwortet werden:

Beobachtung 1.16. Neben \mathcal{S}_{max}^1 und \mathcal{S}_{max}^2 gibt es keine weiteren Sorten maximaler Summen.

Beweis. Dies sieht man ein, betrachtet man die beiden Sorten von Summen, die durch Umkehrung der beiden Additionsverfahren entstehen, die zu \mathcal{S}_{max}^1 bzw. \mathcal{S}_{max}^2 geführt haben:

1. Zu einer beliebigen Ikosaederecke werden nicht die fünf Nachbarecken, sondern die Antipodenpunkte dieser fünf Nachbarecken addiert.

Da für den Antipodenpunkt einer beliebigen Ikosaederecke nach Definition gilt

$$\text{Antipodenpunkt}(w_i) = -w_i \quad \text{für alle } w_i \in \{\pm w_1, \dots, \pm w_6\}$$

können wir mit Hilfe der Ergebnisse aus Beobachtung 1.12 auch diese Sorte von Summen berechnen:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(w_i + \sum \text{Antipodenpunkte}(\text{Nachbarecken}(w_i))) \\ &= \frac{1}{2}(w_i - \sum \text{Nachbarecken}(w_i)) \\ &= \frac{1}{2}(w_i - \sqrt{5}w_i) = -\varphi w_i. \end{aligned}$$

Wegen $-\varphi w_i < -\Phi w_i$ und der Tatsache, dass $-\Phi w_i$ für alle $w_i \in \{\pm w_1, \dots, \pm w_6\}$ gerade maximale Summen der ersten Sorte sind – und damit Fensterecken von V , liegen die soeben gebildeten Summen sicher alle innerhalb des noch unbekannten konvexen Polyeders V . Wir haben damit eine erste Sorte minimaler Summen gefunden, genannt \mathcal{S}_{min}^1 , und analog zu \mathcal{S}_{max}^1 gilt für diese $|\mathcal{S}_{min}^1| = 12$.

2. Zu einer beliebigen Ikosaederecke werden die Antipodenpunkte von vier der fünf Nachbarecken sowie die noch verbleibende fünfte Nachbarecke addiert.

Diese Grundform von Summe lässt sich wieder am Besten anhand eines Beispiels

1. Die Projektionsmethode

veranschaulichen. Ausgehend von der Ikosaederecke $-w_6$ ist beispielsweise die folgende Summe von soeben beschriebener Grundform, vgl. Beispiel 1 auf Seite 22:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(-w_6 - w_1 - w_2 - w_3 - w_4 + w_5) \\ &= \frac{1}{2}(-w_6 - \sum \text{Nachbarecken}(-w_6) + 2w_5) \\ &= +\varphi w_6 + w_5. \end{aligned}$$

Ändern wir Abbildung 1.14 ein klein wenig ab, so folgt damit unmittelbar: Der Punkt $+\varphi w_6 + w_5$ liegt im Inneren des Ikosaeders mit den Ecken $\pm\Phi w_1, \dots, \pm\Phi w_6$ und kann folglich kein Eckpunkt des Fensters V sein, siehe Abbildung 1.16. Wir haben demnach eine zweite Sorte minimaler Summen, genannt \mathcal{S}_{min}^2 , gefunden und theoretisch kann diese Form von Summe wieder für jede der 12 Ikosaederecken auf fünf verschiedene Weisen gebildet werden. Analog zu den Überlegungen bezüglich \mathcal{S}_{max}^2 in Beobachtung 1.15 folgt aber auch in diesem Fall, dass je drei dieser Summen praktisch zusammenfallen, und somit gilt $|\mathcal{S}_{min}^2| = 20$.

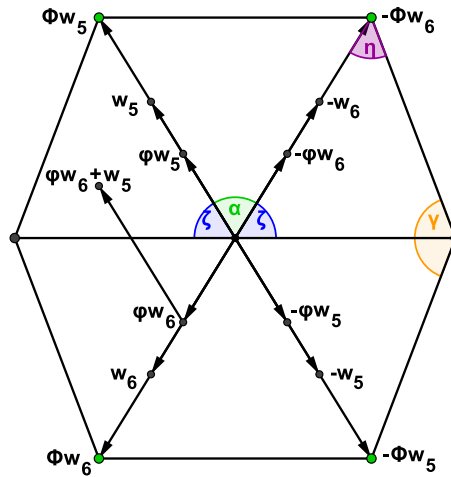


Abbildung 1.16.: Ein Blick auf den Querschnitt durch den Ikosaeder mit den Eckpunkten $\pm\Phi w_1, \dots, \pm\Phi w_6$ zeigt: Der Punkt $+\varphi w_6 + w_5$ liegt innerhalb dieses Ikosaeders.

Zusätzlich zu den 32 tatsächlichen Fensterecken \mathcal{S}_{max}^1 und \mathcal{S}_{max}^2 haben wir folglich weitere 32 Punkte gefunden, die zwar potentiell mögliche Ecken des konvexen Polyeders V sind, in Wahrheit jedoch im Inneren des Fensters liegen: die beiden Summen \mathcal{S}_{min}^1 und \mathcal{S}_{min}^2 . Da die Anzahl aller möglichen Fensterecken, wie auf Seite 17 festgestellt, insgesamt gleich 64 ist, sind wir mit diesem Teilschritt fertig und müssen keine weiteren Summen mehr suchen! \square

Zu klären bleibt allerdings noch die Frage nach der Gestalt des Fensters V : Was ist der Aufspann der ermittelten 32 tatsächlichen Ecken \mathcal{S}_{max}^1 und \mathcal{S}_{max}^2 ?

Die Gestalt des Fensters V

Wie bereits erwähnt, spannen die 12 maximalen Summen der ersten Sorte einen Ikosaeder mit den Eckpunkten $\pm\Phi w_1, \dots, \pm\Phi w_6$ auf. Ferner wissen wir, dass die 20 weiteren Ecken des konvexen Polyeders V genau auf eine zweite Sorte maximaler Summen zurückgehen. Darüber hinaus gilt aber noch mehr:

Beobachtung 1.17. *Die 20 Eckpunkte des Typs \mathcal{S}_{max}^2 sind genau die 20 Ecken eines Dodekaeders.*

Beweis. Mit Beobachtung 1.14 ist bekannt: Jede Ecke des Typs \mathcal{S}_{max}^2 kann auf genau drei verschiedene Weisen erreicht werden, d. h. durch Anwendung des Additionsprinzips 1.13 auf genau drei verschiedene Punkte $\pm w_i$ mit $1 \leq i \leq 6$, vgl. (1.18). Geometrisch entspricht das der Tatsache, dass die Ecken des Typs \mathcal{S}_{max}^2 nicht irgendwo oberhalb der Seitenflächen des Ikosaeders mit den Eckpunkten $\pm\Phi w_1, \dots, \pm\Phi w_6$ liegen, sondern genau oberhalb der Mittelpunkte dieser Seitenflächen.¹² Weil nun ganz allgemein für einen platonischen Körper gilt, dass das Verbinden der Mittelpunkte benachbarter Seitenflächen den sogenannten *Dualkörper* ergibt, welcher wiederum ein platonischer Körper ist, erhalten wir in unserem Fall durch das Verbinden aller Ecken des Typs \mathcal{S}_{max}^2 den Dualkörper des Ikosaeders, und das ist gerade ein Dodekaeder. \square

Mit Hilfe dieser Ergebnisse können wir auf die gesuchte Gestalt des Fensters V schließen.

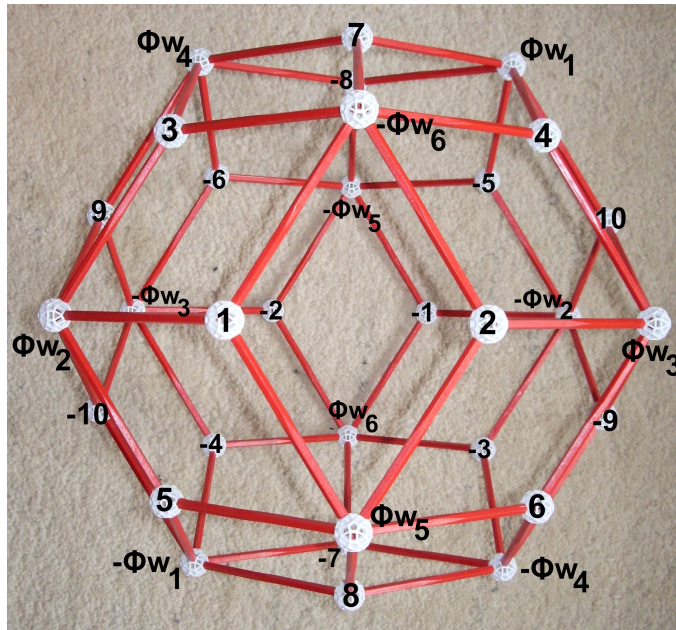


Abbildung 1.17.: Das Fenster V im Hilfsraum F mit den entsprechenden Koordinaten, vgl. Tabelle 1.1

¹²Siehe Abbildung 1.15: Zu der Ecke $-\Phi w_6 - w_5 = +\Phi w_4 + w_3 = +\Phi w_1 + w_2$ des Typs \mathcal{S}_{max}^2 gelangt man von jeder der drei Ikosaederecken $-\Phi w_6$ und $+\Phi w_1$ sowie $+\Phi w_4$ aus, welche gerade eine gemeinsame Seitenfläche des Ikosaeders bilden, durch Addition einer Einheitsrichtung $\pm w_i$ mit $1 \leq i \leq 6$.

1. Die Projektionsmethode

Beobachtung 1.18. *Das Fenster V im Hilfsraum F hat die Gestalt eines Rhombentriakontaeders: Ein konvexes gleichseitiges Polyeder mit 30 rautenförmigen Grundseiten, 32 Eckpunkten und 60 Kanten.*

Beweis. Jede der 20 Dodekaederecken des Fensters V wird von drei der 12 Ikosaederecken von V umgeben, vgl. Abbildung 1.15. Umgekehrt wird auch jede der 12 Ikosaederecken des Fensters V von fünf der 20 Dodekaederecken von V umgeben. Gesucht ist demnach die lineare Hülle der Vereinigungsmenge der Durchdringung eines Ikosaeders und eines Dodekaeders, und das ist ein Rhombentriakontaeder. \square

Die beiden verschiedenen Eckentypen des Rhombentriakontaeders unterscheiden sich dabei in der Anzahl der Grundflächen, die jeweils an ihnen zusammenkommen: An jeder der 12 Ikosaederecken des Fensters V treffen stets fünf Rauten zusammen, an jeder der 20 Dodekaederecken des Fensters V stets drei Rauten. Die Diagonalen der Rauten eines Rhombentriakontaeders teilen sich stets im Verhältnis des Goldenen Schnitts, es sind folglich allesamt Goldene Rauten, welche auch die Grundseiten der beiden Pflastersteine des dreidimensionalen Penrose-Musters bilden, vgl. Beobachtung 1.7. Nach Festlegung der Koordinaten im Hilfsraum F , vgl. Abbildung 1.12, ergeben sich damit für das von uns betrachtete Fenster V die in Abbildung 1.17 genannten Koordinaten.

Im weiteren Verlauf werden wir immer wieder auf diese Koordinaten zurückgreifen. Für ein besseres Verständnis sollen deshalb auch die Koordinaten der 20 Dodekaederecken in ihren jeweils formal unterschiedlichen Schreibweisen aufgeführt werden. Die folgende Tabelle nennt die Koordinaten der in Abbildung 1.17 mit 1 bis 10 gekennzeichneten Dodekaederecken. Die dazu antipodalen Ecken sind entsprechend mit einem Minus gekennzeichnet und besitzen in ihren Koordinaten das jeweils entgegengesetzte Vorzeichen.

Dodekaederecke	Koordinaten
1	$\Phi w_2 + w_3 = \Phi w_5 + w_4 = -\Phi w_6 - w_1$
2	$\Phi w_3 + w_2 = \Phi w_5 + w_1 = -\Phi w_6 - w_4$
3	$\Phi w_2 + w_1 = \Phi w_4 + w_5 = -\Phi w_6 - w_3$
4	$\Phi w_1 + w_5 = \Phi w_3 + w_4 = -\Phi w_6 - w_2$
5	$\Phi w_2 - w_4 = \Phi w_5 - w_3 = -\Phi w_1 - w_6$
6	$\Phi w_3 - w_1 = \Phi w_5 - w_2 = -\Phi w_4 - w_6$
7	$\Phi w_1 + w_2 = \Phi w_4 + w_3 = -\Phi w_6 - w_5$
8	$\Phi w_5 + w_6 = -\Phi w_1 + w_3 = -\Phi w_4 + w_2$
9	$\Phi w_2 - w_5 = -\Phi w_3 - w_6 = \Phi w_4 - w_1$
10	$\Phi w_1 - w_4 = -\Phi w_2 - w_6 = \Phi w_3 - w_5$

Tabelle 1.1.: Die Koordinaten der Dodekaederecken des Fensters V in Abbildung 1.17

Bemerkung. Nach Konstruktion besitzen der flache und der lange Pflasterstein sowie das Fenster V alle dieselbe Kantenlänge, denn es gilt $|\pm v_i| = |\pm w_i|$ für alle $1 \leq i \leq 6$, vgl. 1.3.3 und 1.3.4.

Abschließend wollen wir für die Fensterrauten noch eine hilfreiche Notation einführen und einen Blick auf die Symmetrien des Fensters V werfen. Beides wird in Kapitel 2 und 3 wichtig werden.

Nach Konstruktion von V besitzt jede der 30 Fensterrauten als Eckpunkte stets zwei Ikosaeder- sowie zwei Dodekaederecken. Um im Weiteren aber nicht immer alle diese Eckpunkte nennen zu müssen, führen wir folgende Bezeichnung ein:

Bezeichnung der Fensterrauten 1.19. $R_{(\pm m, \pm n)}$ bezeichne die Fensterraute R mit den beiden Ikosaederecken $\pm\Phi w_m$ und $\pm\Phi w_n$, wobei $m, n \in \{1, \dots, 6\}$ und $m < n$.

Diese Vereinfachung ist möglich, da jede der 30 Fensterrauten eindeutig durch ihre beiden Ikosaederecken bestimmt ist und diese, im Gegensatz zu den Dodekaederecken, auch eindeutig geschrieben werden können. Bezüglich der Symmetriegruppe des Fensters V gilt:

Beobachtung 1.20. Die Symmetriegruppe des Fensters V ist isomorph zu $A_5 \times \{\pm 1\}$.

Beweis. Das Fenster V als lineare Hülle der Vereinigungsmenge der Durchdringung eines Ikosaeders und Dodekaeders ist invariant unter der Drehgruppe G des Ikosaeders mit $|G| = 60$. Diese Gruppe ist isomorph zur alternierenden Gruppe A_5 . Unter Berücksichtigung der Spiegelungen erhält man daher die erweiterte Ikosaedergruppe $A_5 \times \{\pm 1\}$ der Ordnung 120. \square

2. Das Fenster V

Im vorherigen Kapitel wurde erläutert, auf welche Art das dreidimensionale Penrose-Muster erzeugt werden kann: durch Projektion aller ganzzahligen Gitterpunkte $z \in \mathbb{Z}^6$ innerhalb des Streifens $E + I^6 \subset \mathbb{R}^6$ auf den dreidimensionalen Unterraum E . Mit Hilfe der orthogonalen Projektion π_F auf den Hilfsraum $F \cong \mathbb{R}^3$ konnten wir diesen sechsdimensionalen Streifen $E + I^6$ aber auch noch anders beschreiben, vgl. (1.12), und durch die dadurch gewonnene Reduzierung der zu betrachtenden Dimensionen letzten Endes auch unserer Vorstellung zugänglich machen: $E + I^6 = E + V$ mit $V = \pi_F(I^6) \subset \mathbb{R}^3$. Das auf diese Weise entstandene Fenster V hatte dabei die Gestalt eines Rhombentrikontaeders.

Fasst man all diese Überlegungen zusammen, so erhält man für einen beliebigen Gitterpunkt $z \in \mathbb{Z}^6$ die folgenden Äquivalenzen, wobei $z_E := \pi_E(z) \subset E$ und $z_F := \pi_F(z) \subset F$:¹³

Äquivalenz-Kriterium 2.1. z_E ist Teil des Musters $M_E \iff z$ wird auf E projiziert $\iff z \in (E + I^6) \subset \mathbb{R}^6 \iff z_F \in V$.

Mit Hilfe dieser Äquivalenzen kann man nun aber nicht nur testen, ob ein Gitterpunkt $z \in \mathbb{Z}^6$ auf den Projektionsraum E projiziert wird, sondern vielmehr auch eine Aussage darüber treffen, was für $1 \leq i \leq 6$ mit den 12 Nachbargitterpunkten $z \pm e_i$ dieses ganzzahligen Punktes z geschieht: Werden diese ebenfalls auf E projiziert oder nicht? Wegen der Linearität der Projektionsabbildung gilt für alle $1 \leq i \leq 6$:¹⁴

Nachbarpunkt-Kriterium 2.2. $z_E \pm v_i$ ist Teil des Musters $M_E \iff z \pm e_i$ wird auf E projiziert $\iff z \pm e_i \in (E + I^6) \subset \mathbb{R}^6 \iff \pi_F(z \pm e_i) \in V \iff z_F \pm w_i \in V$.

Das Fenster V ist also viel mehr als nur ein Streifenersatz: Es liefert auch ein Entscheidungskriterium dafür, welche der Nachbarpunkte eines Punktes $z \in (E + I^6) \subset \mathbb{R}^6$ ebenfalls Teil des Musters M_E sind und welche nicht!¹⁵

Diese Gedanken können wir gewissermaßen systematisieren, indem wir umgekehrt fragen: Wo im Fenster V muss der Projektionspunkt z_F eines Gitterpunktes $z \in \mathbb{Z}^6$ liegen, damit neben z auch der Nachbargitterpunkt $z + e_k$ für ein $e_k \in \{\pm e_1, \dots, \pm e_6\}$ auf E projiziert wird? Wir gelangen so zu den verschiedenen *Gebieten* und *Eckentypen* von V , die genau auf diese Frage eine Antwort geben. Für ein besseres Verständnis soll auch dieses Konzept zuerst am Beispiel des \mathbb{R}^2 betrachtet werden.

¹³Diese Äquivalenzen werden im Folgenden sehr wichtig sein, da sie es uns ermöglichen, ein und denselben Punkt in verschiedenen Räumen zu betrachten: im Ausgangsraum W , im Projektionsraum E oder im Hilfsraum F .

¹⁴Dabei ist $\pm v_i = \pm \pi_E(e_i)$ sowie $\pm w_i = \pm \pi_F(e_i)$ für alle $1 \leq i \leq 6$, vgl. 1.3.3 sowie 1.3.4.

¹⁵Der Begriff *Nachbarpunkt* meint dabei im Folgenden ebenso wie der Begriff *Nachbargitterpunkt* stets die ganzzahligen Nachbarn eines Gitterpunktes $z \in \mathbb{Z}^6 \subset \mathbb{R}^6$, denn nur diese interessieren!

2.1. Gebiete und Eckentypen im \mathbb{R}^2

Das Fenster V ist im \mathbb{R}^2 Teil der Hilfsgeraden $F \in \mathbb{R}$, vgl. 1.2, und ein Gitterpunkt $z \in \mathbb{Z}^2$ besitzt die vier möglichen Nachbargitterpunkte $z \pm e_1$ und $z \pm e_2$.

Die Frage, wo im Fenster V der Projektionspunkt z_F eines Gitterpunktes z liegen muss, damit auch beispielsweise dessen Nachbargitterpunkt $z + e_1$ auf E projiziert wird, lässt sich hier sehr anschaulich lösen. Wegen Kriterium 2.2 ist zu klären: In welchem *Teilgebiet* V_{+1} des Fensters V folgt mit $z_F \in V$ stets auch $z_F + w_1 \in V$?¹⁶

Beobachtung 2.3. Für das Teilgebiet $V_{+1} = ((V - w_1) \cap V)$ gilt

$$z_F \in V_{+1} \iff z_F \in V \text{ sowie } z_F + w_1 \in V.$$

$V_{+1} \subset V$ ist somit das Teilgebiet des Fensters V , innerhalb dessen man den Projektionspunkt z_F eines Gitterpunktes $z \in (E + I^2) \subset \mathbb{R}^2$ stets nach $+w_1$ verschieben darf, ohne V zu verlassen!

Beweis. Wegen $V \subset F \cong \mathbb{R}$ ist diese Beobachtung mit Hilfe der folgenden Zeichnung graphisch lösbar:

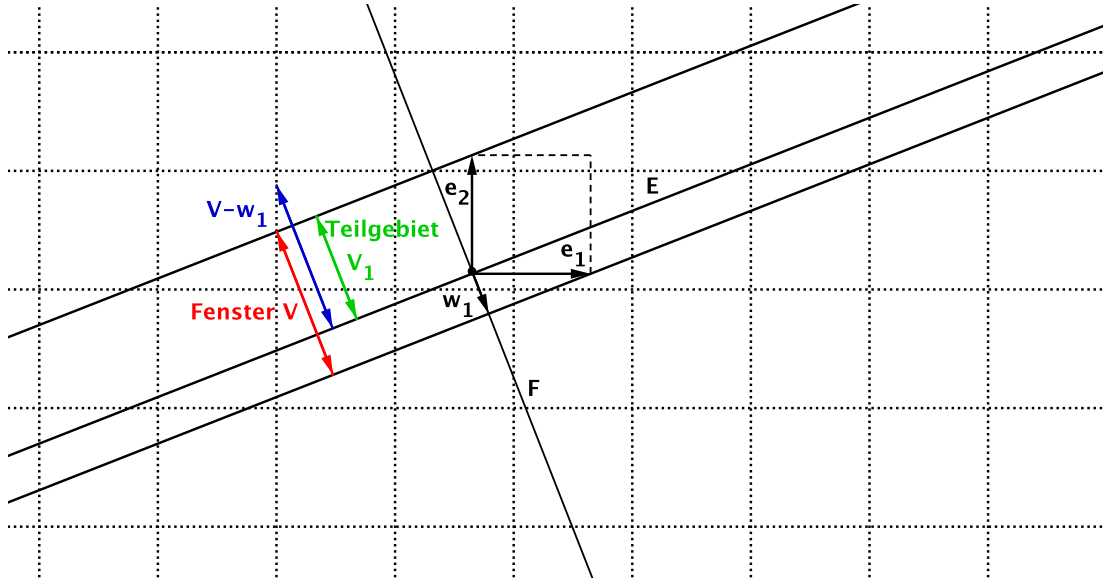


Abbildung 2.1.: Das Teilgebiet V_{+1} des Fensters V

□

Die gleichen Überlegungen können wir natürlich auch für die drei noch verbleibenden Nachbargitterpunkte $z + e_2$ und $z - e_1$ sowie $z - e_2$ des Gitterpunktes z durchführen und erhalten so analog die drei Teilgebiete $V_{+2} = ((V - w_2) \cap V)$ und $V_{-1} = ((V + w_1) \cap V)$ sowie $V_{-2} = ((V + w_2) \cap V)$ des Fensters V .

Bildet man den Schnitt dieser vier Teilgebiete V_{+1} und V_{-1} sowie V_{+2} und V_{-2} , so ergibt sich die Einteilung des Fensters V in die folgenden *Gebiete*:

¹⁶Analog zum dreidimensionalen Penrose-Fall gilt $\pm\pi_F(e_i) = \pm w_i$ sowie $\pm\pi_E(e_i) = \pm v_i$ für $i = 1, 2$.

Beobachtung 2.4. Das Fenster V lässt sich disjunkt zerlegen in die folgenden Gebiete:
 $V = \Omega_1 \sqcup \Omega_2 \sqcup \Omega_{1'}$ mit $\Omega_1 = (V_{+1} \cap V_{-2})$ und $\Omega_2 = (V_{+1} \cap V_{-1})$ sowie $\Omega_{1'} = (V_{-1} \cap V_{+2})$.

Beweis. Auch diese Beobachtung ist wieder graphisch lösbar:

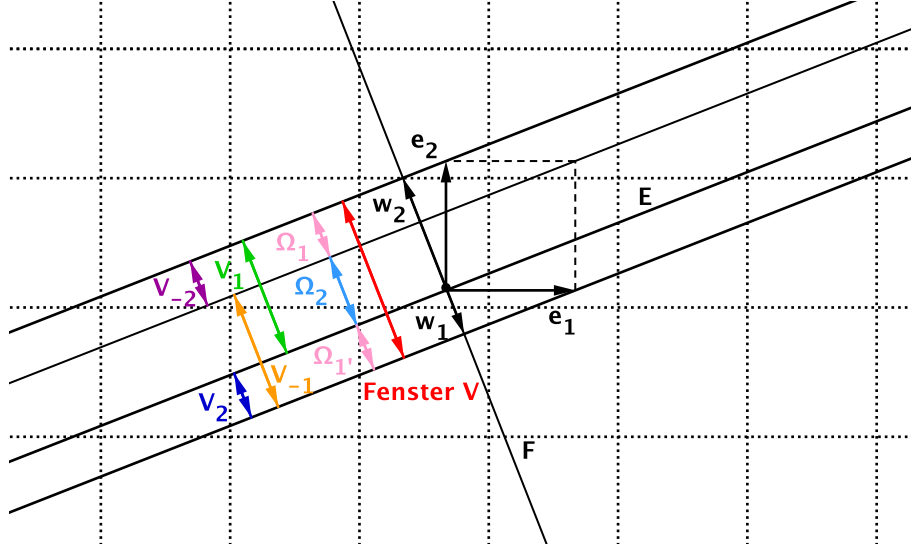


Abbildung 2.2.: Die Teilgebiete V_{+1} und V_{-1} sowie V_{+2} und V_{-2} des Fensters V

□

Nach Konstruktion unterscheiden sich die drei Gebiete Ω_1 und Ω_2 sowie $\Omega_{1'}$, somit gerade darin, welche der Nachbarnpunkte $z \pm e_i$ des Gitterpunktes $z \in \mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$ für $i = 1, 2$ jeweils noch erlaubt sind und welche nicht, vgl. die Kriterien 2.1 und 2.2:

1. Für $z_F \in \Omega_1$ gilt $z_F + w_1 \in V$ und $z_F - w_2 \in V$ sowie $z_F - w_1 \notin V$ und $z_F + w_2 \notin V$.
 Oder mit anderen Worten:
 Neben $z \in (E + I^2) \subset \mathbb{R}^2$ gilt $z + e_1 \in (E + I^2) \subset \mathbb{R}^2$ sowie $z - e_2 \in (E + I^2) \subset \mathbb{R}^2$
 d. h. neben z_E sind auch $z_E + v_1$ und $z_E - v_2$ Teil des Musters M_E .
2. Für $z_F \in \Omega_2$ gilt $z_F + w_1 \in V$ und $z_F - w_1 \in V$ sowie $z_F + w_2 \notin V$ und $z_F - w_2 \notin V$.
 Oder mit anderen Worten:
 Neben $z \in (E + I^2) \subset \mathbb{R}^2$ gilt $z + e_1 \in (E + I^2) \subset \mathbb{R}^2$ sowie $z - e_1 \in (E + I^2) \subset \mathbb{R}^2$
 d. h. neben z_E sind auch $z_E + v_1$ und $z_E - v_1$ Teil des Musters M_E .
3. Für $z_F \in \Omega_{1'}$ gilt $z_F - w_1 \in V$ und $z_F + w_2 \in V$ sowie $z_F + w_1 \notin V$ und $z_F - w_2 \notin V$.
 Oder mit anderen Worten:
 Neben $z \in (E + I^2) \subset \mathbb{R}^2$ gilt $z - e_1 \in (E + I^2) \subset \mathbb{R}^2$ sowie $z + e_2 \in (E + I^2) \subset \mathbb{R}^2$
 d. h. neben z_E sind auch $z_E - v_1$ und $z_E + v_2$ Teil des Musters M_E .

Man erhält damit für einen Gitterpunkt $z \in (E + I^2) \subset \mathbb{R}^2$ die drei verschiedenen Konstellationen von erlaubten Nachbarnpunkten, wie in Abbildung 2.3 gezeigt.

2. Das Fenster V

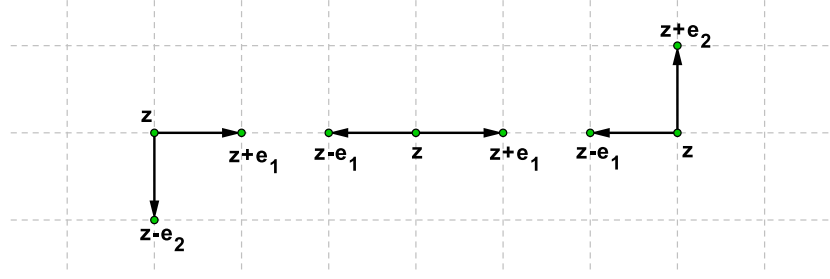


Abbildung 2.3.: Die drei möglichen Konstellationen von Nachbarpunkten eines Punktes $z \in (E + I^2) \subset \mathbb{R}^2$: Links gilt $z_F \in \Omega_1$, in der Mitte $z_F \in \Omega_2$ und rechts $z_F \in \Omega_1$.

Treffen wir jedoch die Vereinbarung, Kongruenzen nicht zu unterscheiden, dann sind die Konstellationen von Nachbarpunkten, die die Gebiete Ω_1 und Ω_1' liefern, identisch. Folglich gilt:

Beobachtung 2.5. Das Fenster V lässt sich disjunkt zerlegen in die beiden Gebiete des Typs Ω_1 und Ω_2 , d. h. es gilt $V = \Omega_1 \sqcup \Omega_2 \sqcup \Omega_1$. Damit existieren zwei nicht-kongruente Konstellationen von erlaubten Nachbarpunkten eines Gitterpunktes $z \in (E + I^2) \subset \mathbb{R}^2$, welche im Folgenden als Eckentypen bezeichnet werden sollen:

$$z \in \mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2 \text{ heißt Ecke des Typs } \omega_j \iff z_F \in \Omega_j, \text{ wobei } j = 1, 2.$$

Bemerkung. Da wir gemäß Äquivalenz-Kriterium 2.1 jedoch einen beliebigen Gitterpunkt $z \in \mathbb{Z}^2$ nicht nur in seinem Ausgangsraum, in diesem Fall dem \mathbb{R}^2 , betrachten, sondern vielmehr auch dessen Projektionspunkte z_E im Projektionsraum E sowie z_F im Hilfsraum F , sollen ebenso z_E und z_F als Ecke des Typs ω_j bezeichnet werden, d. h. es soll gelten: $z_E \in E$ und $z_F \in F$ heißen Ecke des Typs $\omega_j \iff z_F \in \Omega_j$, wobei $j = 1, 2$.

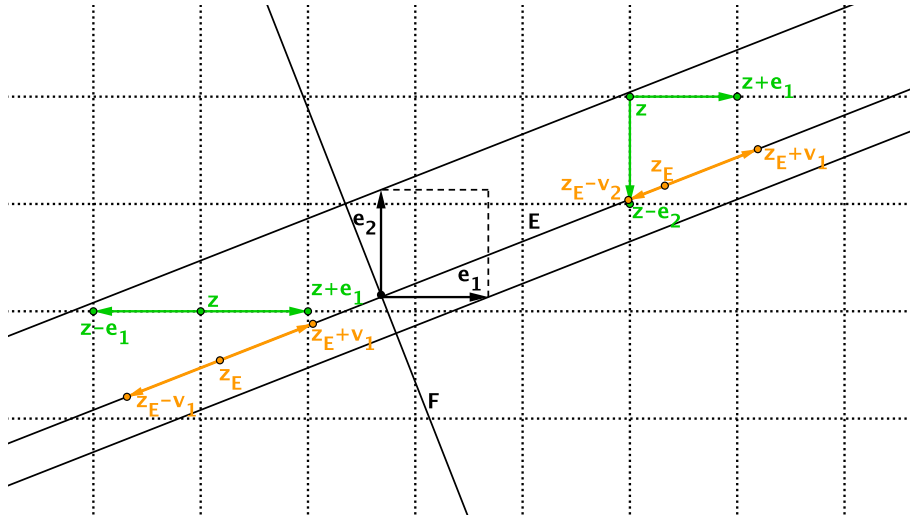


Abbildung 2.4.: Die Eckentypen ω_1 und ω_2 im Fall des \mathbb{R}^2 : grün eingezeichnet im Ausgangsraum \mathbb{R}^2 und gelb eingezeichnet im Projektionsraum E

Diese unterschiedlichen Betrachtungsweisen ein und desselben Punktes in verschiedenen Räumen werden im Fall des dreidimensionalen Penrose-Musters von besonderer Bedeutung sein: Es werden vor allem der Projektionsraum E , in dem das Muster M_E , das untersucht werden soll, „lebt“, sowie der Hilfsraum F interessieren, denn diese beiden Räume sind wegen $E \cong F \cong \mathbb{R}^3$ unserer Vorstellung zugänglich, der Ausgangsraum $W \cong \mathbb{R}^6$ dagegen nicht!

Im Folgenden soll dieses Konzept der Gebiete und Eckentypen auf das dreidimensionale Penrose-Muster übertragen werden.

2.2. Gebiete und Eckentypen im Fall von Penrose 3D

Theoretisch ist mit den in 2.1 angestellten Überlegungen klar, was zu tun ist:

1. In einem ersten Schritt müssen auch hier wieder die Teilgebiete $V_{\pm i}$ für alle möglichen Einheitsrichtungen $\pm e_i$ mit $1 \leq i \leq 6$ ermittelt werden, vgl. Beobachtung 2.3. Es ist also zu klären: Wo im Fenster V darf man für $1 \leq i \leq 6$ den Projektionspunkt z_F eines Gitterpunktes $z \in \mathbb{Z}^6$ nach $\pm w_i$ verschieben, ohne V zu verlassen?
2. In einem zweiten Schritt kann dann mit Hilfe des Schnitts all dieser Teilgebiete $V_{\pm 1}, \dots, V_{\pm 6}$ analog zu Beobachtung 2.5 eine disjunkte Zerlegung des Fensters V konstruiert werden. Auf diese Weise erhält man die Gebiete und Eckentypen für das dreidimensionale Penrose-Muster.

Doch wie sieht es mit der praktischen Umsetzung aus? Soll in Analogie zu den Beispielbetrachtungen im \mathbb{R}^2 versucht werden, die Gebietseinteilung des Fensters V graphisch zu konstruieren, dann bedarf es einiger Hilfsbetrachtungen, um wieder in Dimension zwei arbeiten zu können, denn wegen $V \subset F \cong \mathbb{R}^3$ sind das Fenster V und folglich die gesuchten (Teil-) Gebiete nun dreidimensional!

Wir werden daher zum einen an Stelle des Fensters V selbst in vielen Fällen die Projektion von V auf die Ebene parallel zu einer der 30 Fensterrauten zu Hilfe nehmen. Dieses Projektionsbild und weitere wichtige Hilfsmittel werden in A.3 konstruiert. Zum anderen werden wir die angesprochenen Teilgebiete $V_{\pm 1}, \dots, V_{\pm 6}$ eingeschränkt auf bestimmte Ebenen betrachten.

2.2.1. Der Kern des Fensters V

Ein Gebiet springt jedoch auf Grund der Konstruktion des Fensters V sofort ins Auge: Der Teil von V , innerhalb dessen man den Projektionspunkt z_F eines Gitterpunktes $z \in (E + I^6) \subset \mathbb{R}^6$ stets in alle Einheitsrichtungen¹⁷ $\pm w_1, \dots, \pm w_6$ verschieben darf, ohne V zu verlassen! Dieses Gebiet bezeichnen wir mit Ω_{12} und nennen es *Kern* von V .

¹⁷Vgl. die Bemerkungen auf den Seiten 11 und 20: Die Begriffe *Einheitsvektor/projizierter Einheitsvektor/Einheitsrichtung* werden nicht mehr unterschieden. Die verschiedenen Notationen $\pm v_i$ und $\pm w_i$ sowie $\pm e_i$ für $1 \leq i \leq 6$ sollten jedoch für Klarheit sorgen!

2. Das Fenster V

Beobachtung 2.6. Der Kern von V hat wie das Fenster V selbst auch die Gestalt eines Rhombentriakontaeders, d. h. es gilt $\Omega_{12} = \varphi^2 V$.

Beweis. Nach Konstruktion von V ist klar: Das gesuchte Gebiet Ω_{12} erhält man, indem man V um einen gewissen Faktor $0 < k < 1$ verkleinert, d. h. $\Omega_{12} = kV$, so dass $(kV \pm w_i) \in V$ für alle $1 \leq i \leq 6$. Folglich hat der Kern dieselbe Gestalt wie das Fenster V . Wie aber kann man diesen Faktor k bestimmen? Dazu betrachten wir Abbildung 1.14, ergänzt um das bisherige Wissen, vgl. insbesondere A.3:

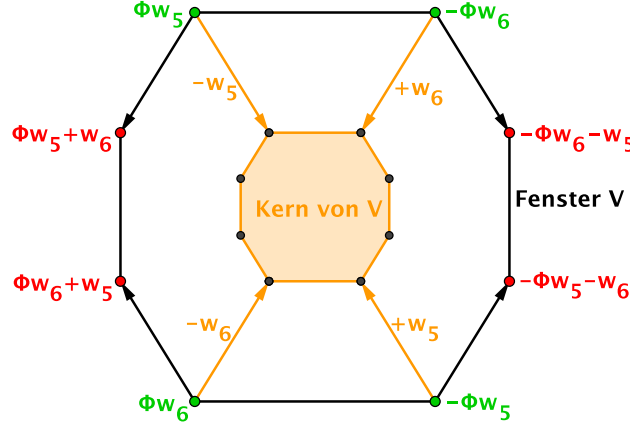


Abbildung 2.5.: Querschnitt durch das Fenster V

Mit Hilfe der Abbildung 2.5 lässt sich k leicht berechnen, beispielsweise wie folgt: Man zieht von der Fensterecke Φw_5 die Einheitsrichtung $+w_5$ ab und erhält damit einen der Eckpunkte von Ω_{12} . Für diesen Eckpunkt gilt $\Phi w_5 - w_5 = (\Phi - 1)w_5$ und folglich ist

$$k = \frac{(\Phi - 1)w_5}{\Phi w_5} = \frac{1}{\Phi} = \varphi^2.$$

□

Mit Ω_{12} haben wir somit ein erstes Gebiet des Fensters V gefunden und wir halten fest:

Beobachtung 2.7. $z \in \mathbb{Z}^6 \subset \mathbb{R}^6$ heißt Ecke des Typs $\omega_{12} \iff z_F \in \Omega_{12}$.

Ist z Ecke des Typs ω_{12} , so werden mit $z \in (E + I^6) \subset \mathbb{R}^6$ stets auch alle theoretisch möglichen Nachbargitterpunkte $z \pm e_i$ für $1 \leq i \leq 6$ auf E projiziert.

Mit anderen Worten: Mit z_E sind auch alle $z_E \pm v_i$ für $1 \leq i \leq 6$ Teil des Musters M_E , vgl. die Kriterien 2.1 und 2.2. Wie aber können die restlichen Gebiete des Fensters V ermittelt werden?

2.2.2. Die weiteren Gebiete des Fensters V

Hierzu greifen wir, wie bereits angedeutet, in einer eingeschränkten Form auf die Idee der Teilgebiete aus den Beispielbetrachtungen im \mathbb{R}^2 zurück. Das Problem ist folgendes: Anschaulich ist sofort klar, auf welche Weise die dreidimensionalen Teilgebiete $V_{\pm 1}, \dots, V_{\pm 6}$

entstehen. Man verschiebt für alle $1 \leq i \leq 6$ das Fenster V in Richtung $\mp w_i$ und bildet anschließend den Schnitt dieses verschobenen Fensters $(V \mp w_i)$ mit dem ursprünglichen Fenster V , i. e.

$$(2.1) \quad V_{\pm i} = ((V \mp w_i) \cap V) \quad \text{für alle } 1 \leq i \leq 6,$$

vgl. Beobachtung 2.3. Doch wie können wir diese Idee zweidimensional fassen und somit die angesprochenen Teilgebiete graphisch konstruieren? Wir wollen dazu die Teilgebiete $V_{\pm 1}, \dots, V_{\pm 6}$ nicht als Ganze, also dreidimensional, betrachten, sondern jeweils eingeschränkt auf bestimmte Ebenen, welche wir im Folgenden mit E_k bezeichnen wollen, die das Fenster V schneiden.¹⁸

Beobachtung 2.8. *Sei $k \in \mathbb{N}$. Dann bezeichnet $V'_{\pm 1}, \dots, V'_{\pm 6}$ die Einschränkung der Teilgebiete $V_{\pm 1}, \dots, V_{\pm 6}$ auf die Ebene E_k , i. e. $V'_{\pm i} = V_{\pm i} \cap E_k$ für alle $1 \leq i \leq 6$.*

$V'_{\pm i}$ ist demnach der Teil der Ebene E_k , innerhalb dessen man den Projektionspunkt z_F eines Gitterpunktes $z \in (E + I^6) \subset \mathbb{R}^6$ für alle $1 \leq i \leq 6$ nach $\pm w_i$ verschieben darf, ohne das Fenster V zu verlassen!

Mit Hilfe dieser zweidimensionalen Teilgebiete $V'_{\pm 1}, \dots, V'_{\pm 6}$ kann nun ganz analog zu den Beispielbetrachtungen im \mathbb{R}^2 die Gebietseinteilung auf den Ebenen E_k graphisch konstruiert werden: Sie ergibt sich gerade wieder aus dem Schnitt der einzelnen $V'_{\pm 1}, \dots, V'_{\pm 6}$. Damit haben wir aber letzten Endes auch einen Weg gefunden, die Gebiete und Eckentypen im Fall des dreidimensionalen Penrose-Musters zu bestimmen: Die Gebietseinteilung auf der Ebene E_k ist nach Konstruktion nämlich genau die Gebietseinteilung des dreidimensionalen Fensters V , eingeschränkt auf eben diese Ebene E_k . Wir kennen damit zwar (noch) nicht die dreidimensionale Gestalt der Gebiete von V , jedoch können wir mit Hilfe der Gebiete auf den Ebenen E_k eine Aussage treffen, welche Gebiete im Fenster V auf jeden Fall existieren. Sei $k, j \in \mathbb{N}$:

Beobachtung 2.9. *Ist Ω'_j Gebiet auf der Ebene E_k , so existiert auch im Fenster V ein entsprechendes dreidimensionales Gebiet Ω_j , denn Ω'_j ist die Einschränkung des Gebiets Ω_j auf die Ebene E_k , d. h. es gilt $\Omega'_j = \Omega_j \cap E_k$.*

Zusammenfassend sind daher mit $k, j \in \mathbb{N}$ die folgenden Punkte zu klären:

1. Wie müssen die Ebenen E_k gewählt werden, damit auch wirklich alle Gebiete Ω_j im Fenster V bestimmt werden?
2. Wie können die unterschiedlichen Teilgebiete $V'_{\pm 1}, \dots, V'_{\pm 6}$ auf den Ebenen E_k ermittelt werden und welche Gebiete Ω'_j existieren folglich jeweils auf E_k ?
3. Welche dreidimensionalen Gebiete Ω_j und welche Eckentypen ω_j gibt es somit insgesamt im Fenster V ?

¹⁸Wir bestimmen sozusagen eine zweidimensionale Version der dreidimensionalen Teilgebiete. Der Index k muss dabei im Folgenden noch näher bestimmt werden, ganz allgemein gilt daher erst einmal $k \in \mathbb{N}$.

Schritt 1: Die Wahl der Schnittebenen

Anschaulich gesprochen geht es bei diesem ersten zu klärenden Punkt um folgende Frage: Wie muss man die Ebenen E_k wählen, damit auch alle Gebiete des Fensters V mindestens von einer dieser Ebenen geschnitten werden? Denn nur wenn das sichergestellt ist, werden mit der eben beschriebenen Vorgehensweise – der Gebietsbestimmung auf den einzelnen Schnittebenen E_k – auch wirklich alle dreidimensionalen Gebiete von V bestimmt!

Dazu kann man wie folgt vorgehen: Bis auf den Kern von V , das Gebiet Ω_{12} , haben wir zwar noch keine Vorstellung davon, welche Gestalt die gesuchten restlichen Gebiete des Fensters V haben, geschweige denn, wie viele Gebiete es überhaupt gibt, wir können uns aber überlegen, auf welchen Ebenen die *Begrenzungsflächen* dieser dreidimensionalen Gebiete von V liegen.

Beobachtung 2.10. *Die Begrenzungsflächen der dreidimensionalen Gebiete des Fensters V liegen auf insgesamt 60 verschiedenen Ebenen.*

Beweis. Fassen wir dazu das bisherige Wissen zusammen:

- Gemäß den Beispielüberlegungen im \mathbb{R}^2 ist klar: Die Gebiete des Fensters V erhält man durch den Schnitt der Teilgebiete $V_{\pm 1}, \dots, V_{\pm 6}$, vgl. die Beobachtungen 2.4 und 2.5. Folglich liegen die Begrenzungsflächen dieser Gebiete auf denselben Ebenen wie die Begrenzungsflächen der Teilgebiete $V_{\pm 1}, \dots, V_{\pm 6}$.
- Für die einzelnen Teilgebiete $V_{\pm i}$ wiederum gilt für alle $1 \leq i \leq 6$ nach (2.1): $V_{\pm i} = ((V \mp w_i) \cap V)$.
- Das Fenster V besitzt die Gestalt eines Rhombentriakontaeders, vgl. Beobachtung 1.18. Somit ist $V \mp w_i$, d. h. die Verschiebung von V um einen beliebigen Einheitsvektor $\mp w_i$ für $1 \leq i \leq 6$, äquivalent zu der Verschiebung der 30 Fensterrauten R von V um eben diesen Einheitsvektor $\mp w_i$.

Um also zu klären, auf welchen Ebenen die Begrenzungsflächen der dreidimensionalen Fenstergebiete Ω_j mit $j \in \mathbb{N}$ liegen, können wir fragen: Auf welchen Ebenen liegen die Begrenzungsflächen der Teilgebiete $V_{\pm 1}, \dots, V_{\pm 6}$? Dazu wiederum muss ermittelt werden, auf welchen Ebenen die Verschiebungen der 30 Fensterrauten R in die 12 möglichen Einheitsrichtungen $\pm w_1, \dots, \pm w_6$ liegen und welche dieser $30 \cdot 12 = 360$ theoretisch möglichen Ebenen das Fenster V dann auch tatsächlich schneiden.

In der Praxis ist es jedoch ausreichend, diese Überlegungen, d. h. die genannten Verschiebungen, nur für eine einzige Fensterraute R durchzuführen und die Ergebnisse dann durch *Analogien* auf alle übrigen 29 Fensterrauten zu übertragen. Grund hierfür ist die besondere Gestalt von V als die eines Rhombentriakontaeders, d. h. eines gleichseitigen Polyeders, und dessen Invarianz unter der Drehgruppe G des Ikosaeders, vgl. Beobachtung 1.20. Wie genau dieses *Prinzip der Analogiebetrachtung* A.6 zu verstehen bzw. anzuwenden ist, wird in A.3 gezeigt. Analog zu den Konstruktionen in A.3 soll im Folgenden die Fensterraute $R_{(5,-6)}$, also die Raute mit den Ikosaederecken Φw_5 und $-\Phi w_6$, als Ausgangsraute gewählt werden, vgl. 1.19.

Die erste Frage lautet somit: Wo, d. h. auf welchen Ebenen, liegen die Verschiebungen von $R_{(5,-6)}$ in alle möglichen Einheitsrichtungen $\pm w_1, \dots, \pm w_6$? Durch die Zerlegung der Einheitsvektoren in ihre jeweilige *Lateral-* und *Höhenkomponente*, vgl. dazu die Überlegungen in A.3, kann dieses Problem nun graphisch gelöst werden: Durch Abtragen der in Abbildung A.7 ermittelten Höhenkomponenten der einzelnen Einheitsvektoren $\pm w_1, \dots, \pm w_6$ bezüglich der Zeichenebene parallel zu Raute $R_{(5,-6)}$:

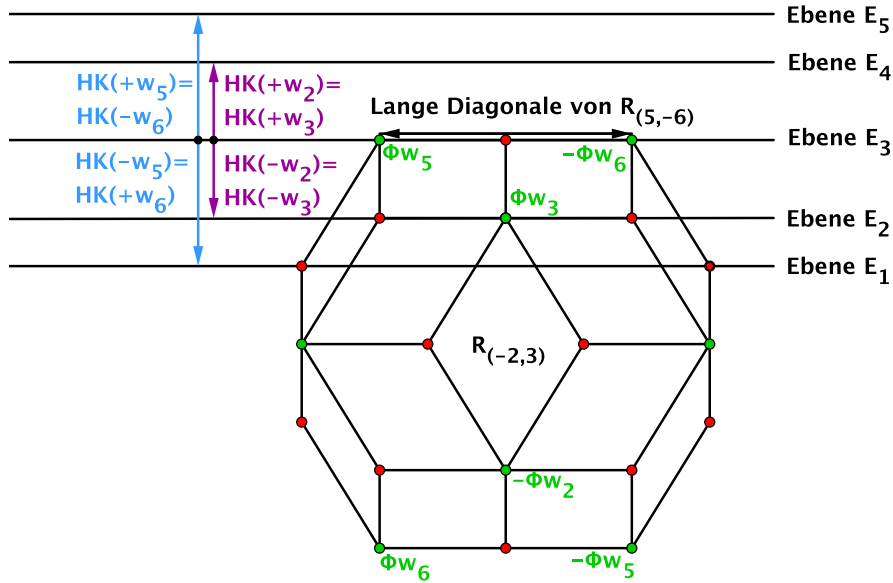


Abbildung 2.6.: Die Verschiebung der Raute $R_{(5,-6)}$ in alle Einheitsrichtungen

Wir erhalten damit die folgenden fünf parallelen Ebenen, auf denen die gesuchten Verschiebungen der Raute $R_{(5,-6)}$ in Richtung der Einheitsvektoren $\pm w_1, \dots, \pm w_6$ liegen:

- Die Verschiebung von $R_{(5,-6)}$ in Richtung $-w_5$ und $+w_6$ liegt auf der Ebene E_1 .
- Die Verschiebung von $R_{(5,-6)}$ in Richtung $-w_2$ und $-w_3$ liegt auf der Ebene E_2 .
- Die Verschiebung von $R_{(5,-6)}$ in Richtung $\pm w_1$ und $\pm w_4$ liegt auf der Ebene in Höhe der Raute $R_{(5,-6)}$ selbst, mit E_3 bezeichnet, denn bezüglich der Zeichenebene parallel zu dieser Raute besitzen diese beiden Paare von Einheitsvektoren keine Höhenkomponente, vgl. Beobachtung A.5.
- Die Verschiebung von $R_{(5,-6)}$ in Richtung $+w_2$ und $+w_3$ liegt auf der Ebene E_4 .
- Die Verschiebung von $R_{(5,-6)}$ in Richtung $+w_5$ und $-w_6$ liegt auf der Ebene E_5 .

Wegen $V_{\pm i} = ((V \mp w_i) \cap V)$ für alle $1 \leq i \leq 6$ bleibt jedoch noch zu klären, welche dieser Ebenen das Fenster V auch wirklich schneiden. Abbildung 2.6 zeigt: Die beiden Ebenen E_4 und E_5 schneiden V ganz offensichtlich nicht, die beiden Ebenen E_1 und E_2 dagegen schon. Wie steht es mit der Ebene E_3 auf dem Rand des Fensters V ? Dazu muss

2. Das Fenster V

beachtet werden, dass die Projektionsmethode mit dem offenen Einheitswürfel $I^6 \subset \mathbb{R}^6$ arbeitet. Demnach ist $V = \pi_F(I^6)$ ebenfalls offen, und folglich schneidet die Ebene E_3 das offene Fenster V selbst nicht! Wir erhalten damit genau zwei Ebenen, E_1 und E_2 , auf denen ein Teil der Begrenzungsflächen der Teilgebiete $V_{\pm 1}, \dots, V_{\pm 6}$ liegt.

Dieses Ergebnis kann nun, wie bereits angesprochen, durch Analogiebetrachtungen auf alle anderen 29 Fensterrauten übertragen werden. Insgesamt ergibt sich damit: Parallel zu jeder der 30 Fensterrauten R existieren genau zwei Ebenen, auf denen jeweils ein Teil der Begrenzungsflächen der Teilgebiete $V_{\pm 1}, \dots, V_{\pm 6}$ liegt und folglich existieren genau $2 \cdot 30 = 60$ verschiedene Ebenen, auf denen alle Begrenzungsflächen der Fenstergebiete Ω_j liegen! \square

Bemerkung. Diese soeben ermittelten 60 Ebenen können auf Grund der besonderen Gestalt des Fensters V als der eines gleichseitigen Polyeders und dem damit verbundenen Prinzip der Analogiebetrachtung A.6 in zwei verschiedene *Typen* von Ebenen klassifiziert werden. Was ist damit gemeint? Im Beweis zu Beobachtung 2.10 haben wir gesehen: Parallel zu jeder der 30 Fensterrauten R existieren stets zwei Ebenen, auf denen jeweils ein Teil der Begrenzungsflächen der Fenstergebiete Ω_j mit $j \in \mathbb{N}$ liegt. Entsprechend ihrem jeweiligen Abstand zu dieser Raute können all diese Ebenen nun in genau zwei verschiedene Typen eingeteilt werden. Wir führen dazu den Index $(\pm m, \pm n)$ in der Bezeichnung der Ebenen ein, vgl. 1.19:

1. Parallel zu jeder der Fensterrauten $R_{(\pm m, \pm n)}$ mit $m, n \in \{1, \dots, 6\}$ und $m < n$ existiert stets eine Ebene im Abstand von E_1 und $R_{(5, -6)}$:
Diese bezeichnen wir mit $E_1^{(\pm m, \pm n)}$ und nennen sie *Ebene des Typs \mathcal{E}_1*
2. Parallel zu jeder der Fensterrauten $R_{(\pm m, \pm n)}$ mit $m, n \in \{1, \dots, 6\}$ und $m < n$ existiert ebenso eine Ebene im Abstand von E_2 und $R_{(5, -6)}$:
Diese bezeichnen wir mit $E_2^{(\pm m, \pm n)}$ und nennen sie *Ebene des Typs \mathcal{E}_2* .

Die Frage, die sich damit stellt, lautet: Ist es ausreichend, genau diese beiden Ebenentypen \mathcal{E}_1 und \mathcal{E}_2 als Schnittebenen zu wählen? Auf diesen 60 Ebenen liegen schließlich alle Begrenzungsflächen der dreidimensionalen Fenstergebiete Ω_j von V , und folglich müssten doch auch alle Gebiete Ω_j im Fenster V von diesen Ebenen geschnitten werden.

Hier gilt es nun folgende Finesse zu berücksichtigen: Eine Begrenzungsfläche eines beliebigen Fenstergebiets Ω_j mit $j \in \mathbb{N}$ hat gerade die Eigenschaft, zwei Gebiete voneinander abzugrenzen. Folglich existieren ober- und unterhalb dieser Begrenzungsfläche zwei verschiedene Gebiete, und genau dieser Tatsache müssen wir noch Rechnung tragen! Es muss zwar kein weiterer Typ von Ebene als Schnittebene gewählt werden, jedoch ist es nicht ausreichend, das Fenster V mit den Ebenen des Typs \mathcal{E}_1 und \mathcal{E}_2 zu schneiden und anschließend allein die Teilgebiete *auf* den Ebenen des Typs \mathcal{E}_1 und \mathcal{E}_2 zu betrachten. Ebenso müssen auch die Teilgebiete *unterhalb* dieser beiden Ebenentypen bestimmt werden. Ein Vergleich von Abbildung 2.5 und Abbildung 2.6 zeigt diesen Sachverhalt anschaulich auf, siehe Abbildung 2.7.

Beobachtung 2.11. Keine der 60 Ebenen des Typs \mathcal{E}_1 und \mathcal{E}_2 schneidet den Kern des Fensters V . Die Gebiete allein auf den Ebenen des Typs \mathcal{E}_1 und \mathcal{E}_2 erfassen folglich das Gebiet Ω_{12} nicht!

Beweis. Auch diese Beobachtung kann mit Hilfe des Analogieprinzips A.6 gezeigt werden: Die Ebene $E_2^{(5,-6)}$ schneidet den Kern von V offensichtlich nicht, und daher schneidet keine der 30 Ebenen des Typs \mathcal{E}_2 das Gebiet Ω_{12} . Wie aber steht es mit $E_1^{(5,-6)}$? Das Fenster V ist, wie bereits erwähnt, als Projektion des offenen Einheitswürfels $I^6 \subset \mathbb{R}^6$ ebenfalls offen. Nach Konstruktion ist damit aber auch der Kern von V offen und wird folglich von $E_1^{(5,-6)}$, der Ebene auf dem Rand des Kerns, nicht geschnitten – und somit ebenso von keiner der Ebenen des Typs \mathcal{E}_1 !

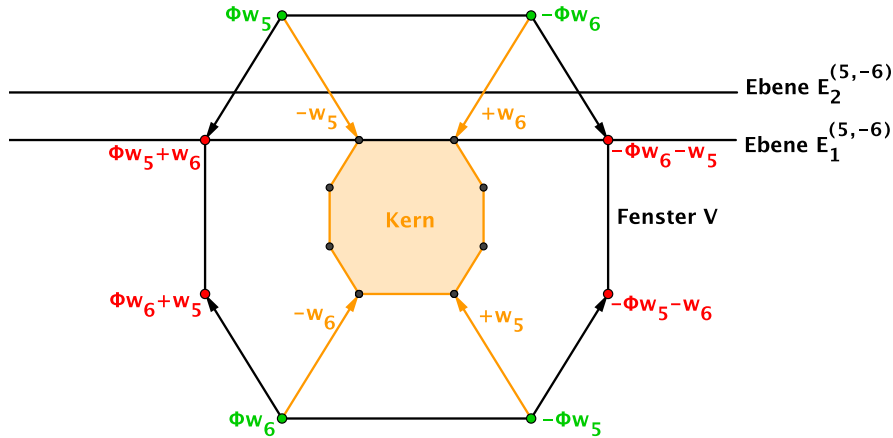


Abbildung 2.7.: Der Kern von V wird von den Ebenen $E_1^{(5,-6)}$ und $E_2^{(5,-6)}$ nicht geschnitten.

□

Zusammenfassend ergibt sich damit:

Beobachtung 2.12. Mit \mathcal{E}_1 und \mathcal{E}_2 existieren genau zwei Typen von Schnittebenen. Für die vollständige Bestimmung aller Gebiete des Fensters V müssen jedoch die Teilgebiete auf den folgenden Ebenentypen bestimmt werden: \mathcal{E}_{1+} und \mathcal{E}_{1-} sowie \mathcal{E}_{2+} und \mathcal{E}_{2-} .

Beweis. Für $k = 1, 2$ und $0 < \delta < 1$ gilt:

$$(2.2) \quad \mathcal{E}_{k-} := \mathcal{E}_k - \delta \quad \text{sowie} \quad \mathcal{E}_{k+} := \mathcal{E}_k + \delta.$$

Mit Beobachtung 2.10 wissen wir: Die Begrenzungsflächen der dreidimensionalen Gebiete des Fensters V liegen allesamt genau auf den Ebenen des Typs \mathcal{E}_1 und \mathcal{E}_2 . Wählt man die Ebenen \mathcal{E}_{1-} und \mathcal{E}_{1+} sowie \mathcal{E}_{2-} und \mathcal{E}_{2+} als Schnittebenen, so trägt man auch der Tatsache Rechnung, dass oberhalb und unterhalb einer Begrenzungsfläche in V stets unterschiedliche Gebiete liegen, vgl. die Überlegungen auf Seite 40. Folglich werden damit auch wirklich alle Gebiete im Fenster V geschnitten. □

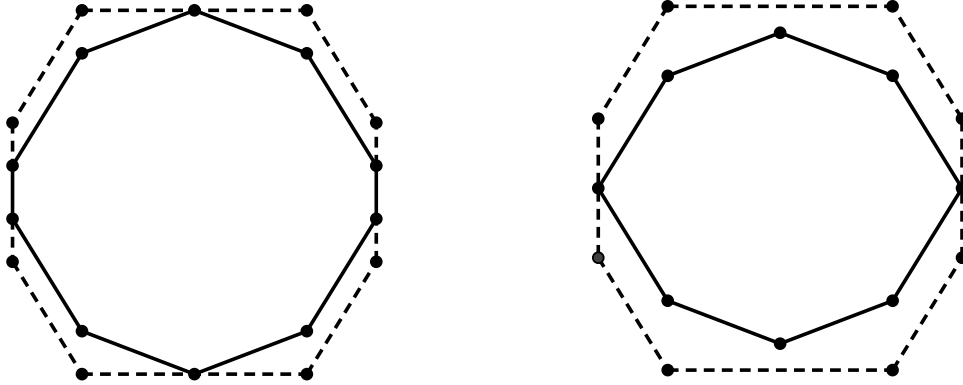
2. Das Fenster V

Bemerkung. Der Index k_{\pm} macht für $k = 1, 2$ deutlich, welche Gebiete konkret gemeint sind: Handelt es sich um die Gebiete direkt oberhalb der Ebene des Typs \mathcal{E}_k , so sprechen wir von den Gebieten der Ebene des Typs \mathcal{E}_{k+} , sind dagegen die Gebiete direkt unterhalb der Ebene des Typs \mathcal{E}_k gemeint, so nennen wir diese analog dazu Gebiete der Ebene des Typs \mathcal{E}_{k-} . In diesem Sinne ist auch die folgende Terminologie zu verstehen:

$z_F \in \mathcal{E}_{k+}$ meint, dass der Projektionspunkt z_F eines Gitterpunktes $z \in (E + I^6) \subset \mathbb{R}^6$ auch wirklich auf (bzw. oberhalb) der Ebene des Typs \mathcal{E}_k liegt. Analog dazu meint $z_F \in \mathcal{E}_{k-}$, dass der Projektionspunkt z_F eines Gitterpunktes $z \in (E + I^6) \subset \mathbb{R}^6$ unterhalb der Ebene des Typs \mathcal{E}_k liegt.

Nachdem wir nun geklärt haben, dass es ausreichend ist, die beiden Ebenen des Typs \mathcal{E}_1 und \mathcal{E}_2 als Schnittebenen von V zu wählen, können wir fragen: Wie sieht der Schnitt dieser beiden Ebenentypen mit dem Fenster V tatsächlich aus? Abbildung 2.6 zeigt lediglich, dass die ermittelten 60 Ebenen des Typs \mathcal{E}_1 und \mathcal{E}_2 das Fenster V schneiden, aber nicht *wie*.

Diese Frage nach dem *Fensterschnitt* der beiden Ebenentypen \mathcal{E}_1 und \mathcal{E}_2 kann wieder mit Hilfe elementargeometrischer Konstruktionen beantwortet werden, siehe hierzu A.3. Nach den bisherigen Ergebnissen ist klar, dass die Gestalt des Fensterschnitts für Ebenen gleichen Typs stets die gleiche ist. Wir erhalten:



(a) Der Schnitt der Ebene des Typs \mathcal{E}_1 mit dem Fenster V , genannt Fensterschnitt \mathcal{E}_1

(b) Der Schnitt der Ebene des Typs \mathcal{E}_2 mit dem Fenster V , genannt Fensterschnitt \mathcal{E}_2

Abbildung 2.8.: Die Fensterschnitte \mathcal{E}_1 und \mathcal{E}_2

Auf Grundlage dieser Ergebnisse können im Folgenden nun die Teilgebiete $V'_{\pm 1}, \dots, V'_{\pm 6}$ ober- und unterhalb der Ebenen des Typs \mathcal{E}_1 und \mathcal{E}_2 konstruiert werden, und somit auch die Gebietseinteilung auf den Ebenentypen \mathcal{E}_{1+} und \mathcal{E}_{1-} sowie \mathcal{E}_{2+} und \mathcal{E}_{2-} .

Schritt 2: Die (Teil-) Gebiete der Schnittebenen des Typs \mathcal{E}_1 und \mathcal{E}_2

Die Frage, der in diesem zweiten Abschnitt nachgegangen werden soll, lautet: Wo auf den unterschiedlichen Ebenentypen \mathcal{E}_{1+} und \mathcal{E}_{1-} sowie \mathcal{E}_{2+} und \mathcal{E}_{2-} darf man den Pro-

jektionspunkt z_F eines Gitterpunktes $z \in (E + I^6) \subset \mathbb{R}^6$ in welche Einheitsrichtung $\pm w_1, \dots, \pm w_6$ verschieben, ohne das Fenster V zu verlassen? Nach den bisherigen Überlegungen ist klar, dass es keine pauschale Antwort geben wird, sondern diese Frage wieder ganz konkret für bestimmte Ebenen gelöst werden muss und alle anderen Fälle dann durch Analogiebetrachtungen folgen. Entsprechend dem bisherigen Vorgehen werden die beiden Ebenen parallel zu der Fensterraute $R_{(5,-6)}$ gewählt, d. h. im Folgenden werden die Teilgebiete für $E_{1-}^{(5,-6)}$ und $E_{1+}^{(5,-6)}$ sowie $E_{2-}^{(5,-6)}$ und $E_{2+}^{(5,-6)}$ ermittelt.

Es gilt jedoch das Folgende zu bedenken: Eine Fallunterscheidung in die Ebenen des Typs \mathcal{E}_{k-} und \mathcal{E}_{k+} für $k = 1, 2$ ist nicht für alle Einheitsrichtungen $\pm w_i$ mit $1 \leq i \leq 6$ notwendig, d. h. die Teilgebiete $V'_{\pm 1}, \dots, V'_{\pm 6}$ dieser vier Ebenentypen müssen nicht völlig getrennt voneinander ermittelt werden. Bezeichnet $\text{HK}(\pm w_i)$ die Höhenkomponente der Einheitsrichtung $\pm w_i$ für $1 \leq i \leq 6$ und \bar{V} den Rand des offenen Fensters V , dann gilt für $k = 1, 2$:

Beobachtung 2.13. *Eine Fallunterscheidung in die Ebenentypen \mathcal{E}_{k-} und \mathcal{E}_{k+} ist nur genau für die Teilgebiete $V'_{\pm i}$ notwendig, für die gilt:*

$$(2.3) \quad (\mathcal{E}_k + \text{HK}(\pm w_i)) \in \bar{V}.$$

Bemerkung. Die Ebene des Typs \mathcal{E}_{k-} besitzt folglich alle Teilgebiete der Ebene des Typs \mathcal{E}_{k+} . Darüber hinaus existieren auf \mathcal{E}_{k-} aber noch genau die Teilgebiete für die Einheitsrichtungen, deren Höhenkomponente gerade Kriterium (2.3) erfüllen.

Beweis. Auch diese Behauptung zeigen wir konkret für die Ebenen $E_1^{(5,-6)}$ und $E_2^{(5,-6)}$. Betrachten wir dazu noch einmal Abbildung 2.7, ergänzt um die Höhenkomponenten der einzelnen Einheitsvektoren bezüglich der Zeichenebene parallel zu Raute $R_{(5,-6)}$, vgl. Abbildung 2.6.

Bemerkungen zu Abbildung 2.9:

- Die Einheitsrichtungen $\pm w_1$ und $\pm w_4$ liegen in der Zeichenebene parallel zu der Fensterraute $R_{(5,-6)}$, ihre Höhenkomponente ist folglich gleich 0. Da die Ebenen $E_{1\pm}^{(5,-6)}$ und $E_{2\pm}^{(5,-6)}$ das Fenster V schneiden, existieren die Teilgebiete $V'_{\pm 1}$ und $V'_{\pm 4}$ damit auf allen vier Ebenen.
- Die Verschiebung der Ebene $E_1^{(5,-6)}$ in Richtung $+w_5$ und $-w_6$ liegt auf dem Rand des Fensters V :

$$(E_1^{(5,-6)} + \text{HK}(+w_5)) \in \bar{V} \quad \text{sowie} \quad (E_1^{(5,-6)} + \text{HK}(-w_6)) \in \bar{V}.$$

Daher schneidet nur die um $+w_5$ bzw. $-w_6$ verschobene Ebene $E_{1-}^{(5,-6)}$ das offene Fenster V und die beiden Teilgebiete V'_{+5} und V'_{-6} existieren allein auf dieser Ebene. Für die Einheitsrichtungen $\pm w_2$ und $\pm w_3$ sowie $-w_5$ und $+w_6$ spielt die Fallunterscheidung in die Ebenen $E_{1-}^{(5,-6)}$ und $E_{1+}^{(5,-6)}$ keine Rolle, denn es schneiden stets beide verschobenen Ebenen das Fenster V und folglich existieren die zugehörigen Teilgebiete stets auch auf beiden Ebenen.

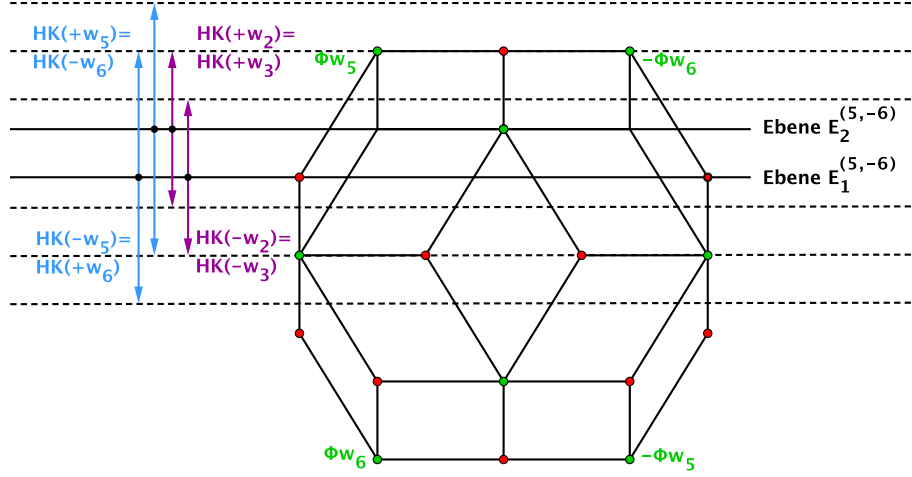


Abbildung 2.9.: Die Höhenkomponenten der Einheitsvektoren $\pm w_2$ und $\pm w_3$ sowie $\pm w_5$ und $\pm w_6$, die Einheitsrichtungen $\pm w_1$ und $\pm w_4$ besitzen bezüglich der Zeichenebene parallel zu Raute $R_{(5,-6)}$ keine Höhenkomponente.

- Gleiches gilt für die Ebene $E_2^{(5,-6)}$ bezüglich der Einheitsrichtungen $+w_2$ und $+w_3$:

$$(E_2^{(5,-6)} + \text{HK}(+w_2)) \in \bar{V} \quad \text{sowie} \quad (E_2^{(5,-6)} + \text{HK}(+w_3)) \in \bar{V}.$$

Die Teilgebiete V'_{+2} und V'_{+3} existieren folglich nur auf der Ebene $E_{2-}^{(5,-6)}$, für alle übrigen Einheitsrichtungen ist eine Fallunterscheidung nicht notwendig: Entweder es schneiden beide verschobenen Ebenen das Fenster V , wie im Fall der Einheitsvektoren $-w_2$ und $-w_3$ sowie $-w_5$ und $+w_6$, und folglich existieren die zugehörigen Teilgebiete auch auf $E_{2-}^{(5,-6)}$ und $E_{2+}^{(5,-6)}$, oder aber beide verschobenen Ebenen schneiden das Fenster V nicht, wie im Fall der Einheitsrichtungen $+w_5$ und $-w_6$, und daher existieren die Teilgebiete V'_{+5} und V'_{-6} auch auf beiden Ebenen nicht.

Gemäß dem Prinzip der Analogiebetrachtung gilt somit ganz allgemein für $k = 1, 2$: Die Ebene des Typs \mathcal{E}_{k-} berücksichtigt im Unterschied zu der Ebene des Typs \mathcal{E}_{k+} , dass das Fenster V offen ist. Folglich liegen auf den Ebenen des Typs \mathcal{E}_{k-} zusätzlich zu den Teilgebieten, die auch \mathcal{E}_{k+} enthält, noch die Teilgebiete der beiden Einheitsrichtungen, die (2.3) erfüllen. \square

Bemerkung. Wir führen daher die folgende sprachliche Konvention ein: Sprechen wir ganz allgemein für $k = 1, 2$ von einem Teilgebiet auf der Ebene des Typs \mathcal{E}_k , so bedeutet das, dass eben dieses Teilgebiet sowohl auf der Ebene \mathcal{E}_{k-} als auch auf \mathcal{E}_{k+} existiert.

Schritt 2.1: Die (Teil-) Gebiete der Ebenen $E_{1\pm}^{(5,-6)}$ und $E_{2\pm}^{(5,-6)}$

Um die Teilgebiete graphisch konstruieren zu können, greifen wir auf die Überlegungen in A.3 zurück, wo versucht wird, die an sich dreidimensionalen Einheitsvektoren $\pm w_1, \dots, \pm w_6$ durch ihre Zerlegung in Lateral- und Höhenkomponente zweidimensional greifbar zu machen.

Die Sonderrolle der Einheitsrichtungen $\pm w_1$ und $\pm w_4$

Nach den Überlegungen im Beweis zu Beobachtung 2.13 existieren die Teilgebiete bezüglich der Einheitsrichtungen $\pm w_1$ und $\pm w_4$ gemäß der soeben getroffenen sprachlichen Konvention auf den Ebenen $E_1^{(5,-6)}$ und $E_2^{(5,-6)}$. Mit Hilfe von Beobachtung A.5 können die gesuchten Teilgebiete sofort konstruiert werden:

Beobachtung 2.14. *Bezüglich der Ebenen $E_1^{(5,-6)}$ und $E_2^{(5,-6)}$ besitzen die beiden Paare $\pm w_1$ und $\pm w_4$ von Einheitsrichtungen keine Höhenkomponente. Die entsprechenden Teilgebiete auf diesen Ebenen können somit ganz analog zu den Teilgebieten im Fall der Beispielbetrachtungen im \mathbb{R}^2 graphisch konstruiert werden.*

Beweis. Die Ebenen $E_1^{(5,-6)}$ und $E_2^{(5,-6)}$ sind nach Konstruktion parallel zu der Fensterraute $R_{(5,-6)}$. Mit Beobachtung A.5 folgt somit, dass die Einheitsrichtungen $\pm w_1$ und $\pm w_4$ keine Höhenkomponente bezüglich dieser beiden Ebenen besitzen, und folglich können die entsprechenden Teilgebiete gemäß den Überlegungen im \mathbb{R}^2 graphisch konstruiert werden, vgl. Beobachtung 2.3. \square

Die Teilgebiete $V'_{\pm 1}$ und $V'_{\pm 4}$ der Ebene $E_1^{(5,-6)}$:

Exemplarisch soll im Folgenden die Konstruktion von V'_{+1} gezeigt werden.

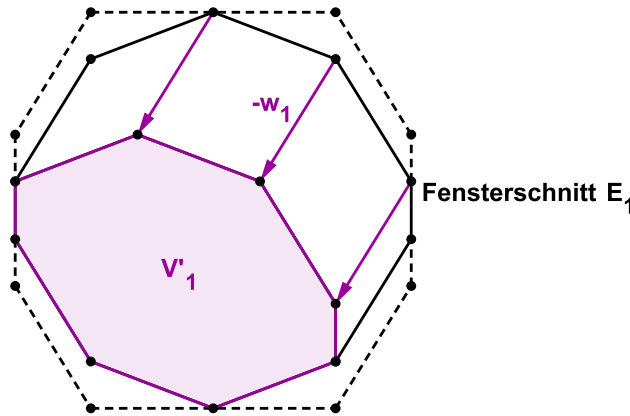


Abbildung 2.10.: Das Teilgebiet V'_{+1} auf der Ebene $E_1^{(5,-6)}$: Innerhalb des lila markierten Bereichs darf man den Projektionspunkt z_F eines Gitterpunktes $z \in (E + I^6) \subset \mathbb{R}^6$ in Richtung $+w_1$ verschieben, ohne das Fenster V zu verlassen.

Konstruktion des Teilgebiets V'_{+1} :

1. Ziehe vom Schnitt der Ebene $E_1^{(5,-6)}$ mit V , d. h. vom Fensterschnitt \mathcal{E}_1 , den ganz in der Zeichenebene liegenden Einheitsvektor $+w_1$, in Abbildung 2.10 lila eingezeichnet, ab.
2. Bilde anschließend den Schnitt dieser Differenz mit dem Fensterschnitt \mathcal{E}_1 und erhalte damit das lila markierte Teilgebiet $V'_{+1} = ((\mathcal{E}_1 - w_1) \cap \mathcal{E}_1)$.

2. Das Fenster V

Führt man diese Konstruktion für alle vier Einheitsrichtungen $\pm w_1$ und $\pm w_4$ durch, so erhält man die Teilgebiete $V'_{\pm 1}$ und $V'_{\pm 4}$ auf der Ebene $E_1^{(5,-6)}$: Innerhalb des mit 1 markierten Gebiets darf man beispielsweise den Projektionspunkt z_F eines Gitterpunktes $z \in (E + I^6) \subset \mathbb{R}^6$ in Richtung $\pm w_1$ und $\pm w_4$ verschieben, ohne das Fenster V zu verlassen, innerhalb des mit 2 markierten Gebiets nur nach $-w_1$ und $\pm w_4$.

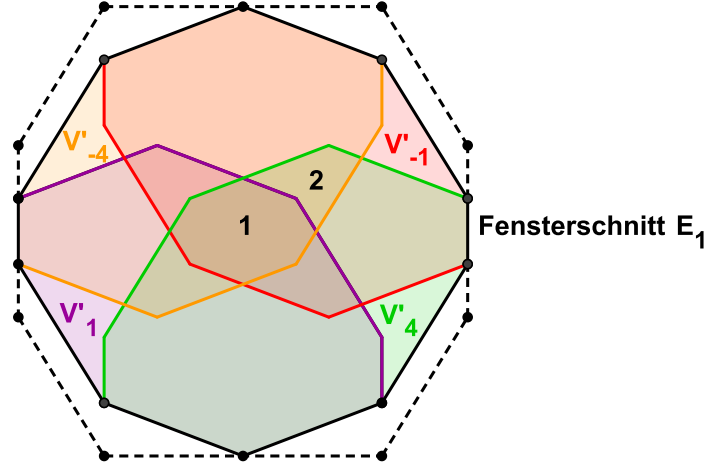


Abbildung 2.11.: Die Teilgebiete $V'_{\pm 1}$ und $V'_{\pm 4}$ auf der Ebene $E_1^{(5,-6)}$

Die Teilgebiete $V'_{\pm 1}$ und $V'_{\pm 4}$ der Ebene $E_2^{(5,-6)}$:

Die Konstruktion der Teilgebiete $V'_{\pm 1}$ sowie $V'_{\pm 4}$ auf der Ebene $E_2^{(5,-6)}$ geschieht ganz analog zu der im Fall der Ebene $E_1^{(5,-6)}$. Wir erhalten:

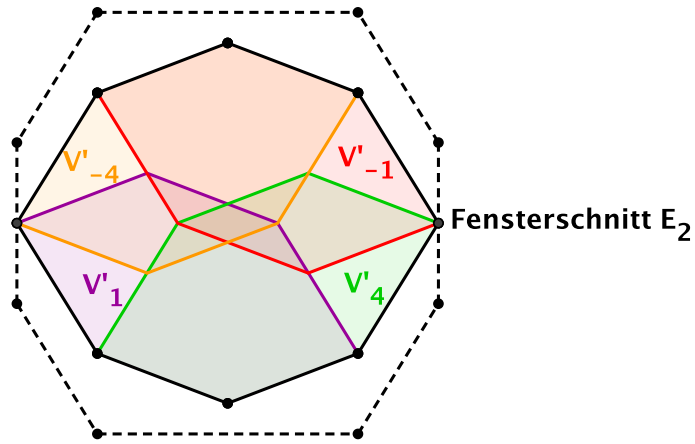


Abbildung 2.12.: Die Teilgebiete $V'_{\pm 1}$ und $V'_{\pm 4}$ auf der Ebene $E_2^{(5,-6)}$

Wie aber kann man im Fall der noch verbleibenden Einheitsvektoren $\pm w_2$ und $\pm w_3$ sowie $\pm w_5$ und $\pm w_6$ vorgehen? Diese Vektoren liegen allesamt gerade nicht mehr ganz in der Zeichenebene parallel zu Raute $R_{(5,-6)}$ und besitzen folglich bezüglich der beiden Ebenen $E_1^{(5,-6)}$ und $E_2^{(5,-6)}$ auch alle eine Höhenkomponente, vgl. Beobachtung A.7.

Die Konstruktion der restlichen Teilgebiete

Mit $k = 1_+, 1_-, 2_+, 2_-$ gilt für die Konstruktion der Teilgebiete der noch verbleibenden Einheitsrichtungen $w_i \in \{\pm w_2, \pm w_3, \pm w_5, \pm w_6\}$ das folgende Konstruktionsprinzip:

Konstruktionsprinzip 2.15. *Verschiebe die Ebene $E_k^{(5,-6)}$ um die Höhenkomponente der Einheitsrichtung w_i und prüfe, ob diese verschobene Ebene das Fenster V schneidet, oder nicht.*

- (i) *Falls nein, d. h. falls $(E_k^{(5,-6)} + \text{HK}(w_i)) \notin V$, dann existiert auf der Ebene $E_k^{(5,-6)}$ das Teilgebiet für w_i nicht.*
- (ii) *Falls ja, d. h. falls $(E_k^{(5,-6)} + \text{HK}(w_i)) \in V$, dann ziehe die Lateralkomponente von w_i von dem Fensterschnitt der um die Höhenkomponente von w_i verschobenen Ebene $E_k^{(5,-6)}$ ab und bilde sodann den Schnitt dieser Differenz mit dem Fensterschnitt \mathcal{E}_k . Auf diese Weise erhält man das gesuchte Teilgebiet für w_i .*

Wie dieser auf den ersten Blick etwas kompliziert erscheinende Gedanke zu verstehen ist, lässt sich am Besten anhand des konkreten Vorgehens veranschaulichen. Beachte jedoch: Die Vorgehensweise im Fall der Einheitsrichtungen $\pm w_1$ und $\pm w_4$ kann ebenfalls mittels Konstruktionsprinzip 2.15 beschrieben werden.¹⁹ Wir haben damit eine allgemein gültige Beschreibung gefunden, wie die Teilgebiete $V'_{\pm 1}, \dots, V'_{\pm 6}$ im Fall des dreidimensionalen Penrose-Musters graphisch konstruiert werden können!

Die restlichen Teilgebiete und die Gebietseinteilung für $E_{1_-}^{(5,-6)}$ und $E_{1_+}^{(5,-6)}$:

Will man die noch fehlenden Teilgebiete dieser Ebenen gemäß dem gerade formulierten Konstruktionsprinzip 2.15 ermitteln, muss vorab geklärt werden:

1. Wo liegen die Verschiebungen der Ebene $E_1^{(5,-6)}$ um die Höhenkomponenten der Einheitsvektoren $\pm w_2$ und $\pm w_3$ sowie $\pm w_5$ und $\pm w_6$?
2. Welche dieser verschobenen Ebenen schneiden das Fenster V auch tatsächlich?
3. Wann ist eine Fallunterscheidung in die Ebenen $E_{1_-}^{(5,-6)}$ und $E_{1_+}^{(5,-6)}$ notwendig?

Sämtliche Fragen wurden bereits im Beweis zu Beobachtung 2.13 beantwortet: Eine Fallunterscheidung ist genau für die beiden Teilgebiete V'_{+5} und V'_{-6} notwendig, die übrigen Teilgebiete existieren für die Ebene $E_1^{(5,-6)}$ ganz allgemein, d. h. sowohl auf der Ebene $E_{1_-}^{(5,-6)}$ als auch auf der Ebene $E_{1_+}^{(5,-6)}$.

Wir vervollständigen mit diesen Ergebnissen Abbildung 2.9 und geben den einzelnen Ebenen eine Bezeichnung, siehe Abbildung 2.13.

¹⁹In diesen Fällen ist die Höhenkomponente gleich 0, und somit ist für $k = 1, 2$ die um die Höhenkomponente von $\pm w_1$ bzw. $\pm w_4$ verschobene Ebene $E_k^{(5,-6)}$ die Ebene $E_k^{(5,-6)}$ selbst.

2. Das Fenster V

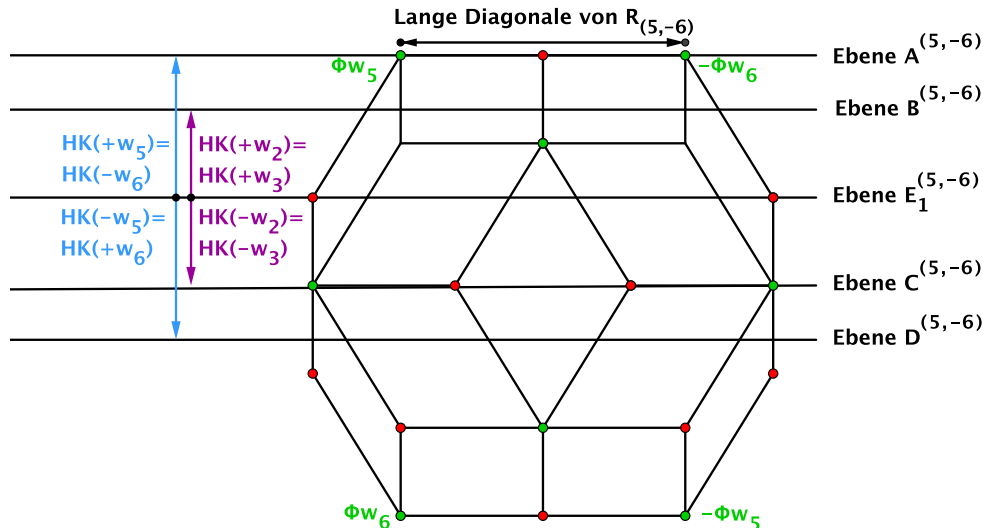


Abbildung 2.13.: Diese Ebenen werden zur Konstruktion der Teilgebiete auf $E_1^{(5,-6)}$ benötigt.

Die Verschiebung der Ebene $E_1^{(5,-6)}$ um

- die Höhenkomponente von $+w_5$ und $-w_6$ bezeichnen wir mit $A^{(5,-6)}$.
- die Höhenkomponente von $+w_2$ und $+w_3$ bezeichnen wir mit $B^{(5,-6)}$.
- die Höhenkomponente von $-w_2$ und $-w_3$ bezeichnen wir mit $C^{(5,-6)}$.
- die Höhenkomponente von $-w_5$ und $+w_6$ bezeichnen wir mit $D^{(5,-6)}$.

Bemerkung. Mit Bezug auf die Bemerkung auf Seite 40 können alle diese Ebenen wieder gemäß ihrem Abstand zu der Fensterraute $R_{(5,-6)}$ in verschiedene Typen von Ebenen klassifiziert werden: Die Ebene $A^{(5,-6)}$ ist eine Ebene des Typs \mathcal{A} , die Ebene $B^{(5,-6)}$ ist eine Ebene des Typs \mathcal{B} , usw. Der Index $(5, -6)$ macht also auch hier wieder deutlich, in Bezug auf welche Fensterraute R die Ebene eines bestimmten Typs betrachtet wird.

Mit dem Wissen, welche Teilgebiete auf den Ebenen $E_{1-}^{(5,-6)}$ und $E_{1+}^{(5,-6)}$ jeweils existieren, sind nun alle Voraussetzungen gegeben, um Konstruktionsprinzip 2.15 auszuführen.

Die (Teil-) Gebiete der Ebene $E_{1+}^{(5,-6)}$:

Entsprechend den soeben angestellten Vorüberlegungen sind in diesem Fall noch die Teilgebiete der folgenden Einheitsrichtungen zu konstruieren: $\pm w_2$ und $\pm w_3$ sowie $-w_5$ und $+w_6$. Abbildung 2.13 zeigt die zur Konstruktion notwendigen Fensterschnitte: Es werden die Schnitte der Ebenen $B^{(5,-6)}$ und $C^{(5,-6)}$ sowie $D^{(5,-6)}$ mit dem Fenster V benötigt, d. h. die Fensterschnitte \mathcal{B} und \mathcal{C} sowie \mathcal{D} , und deren Konstruktion ist völlig analog zu der des Fensterschnitts \mathcal{E}_1 , vgl. A.3.

Im Folgenden soll exemplarisch Teilgebiet V'_{+3} gemäß der Konstruktionsbeschreibung 2.15 ermittelt werden.

Konstruktion des Teilgebiets V'_{+3} :

1. Abbildung 2.13 zeigt: Die Verschiebung der Ebene $E_1^{(5,-6)}$ um die Höhenkomponente von $+w_3$ ergibt die Ebene $B^{(5,-6)}$.
2. Ziehe vom Schnitt der Ebene $B^{(5,-6)}$ mit dem Fenster V , d. h. vom Fensterschnitt \mathcal{B} , die Lateralkomponente von $+w_3$ ab, braun eingezeichnet, vgl. A.3.
3. Bilde anschließend den Schnitt dieser Differenz mit dem Fensterschnitt \mathcal{E}_1 und erhalte somit das braun markierte Teilgebiet $V'_{+3} = ((\mathcal{B} - \text{LK}(+w_3)) \cap \mathcal{E}_1)$.

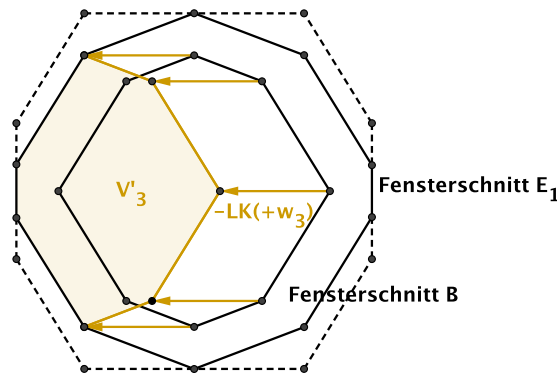


Abbildung 2.14.: Das Teilgebiet V'_{+3} auf der Ebene $E_1^{(5,-6)}$: Innerhalb des braun markierten Bereichs darf man den Projektionspunkt z_F eines Gitterpunktes $z \in (E + I^6) \subset \mathbb{R}^6$ in Richtung $+w_3$ verschieben, ohne das Fenster V zu verlassen.

Die Konstruktion der übrigen Teilgebiete gestaltet sich völlig analog zu diesem Vorgehen. Wir erhalten:

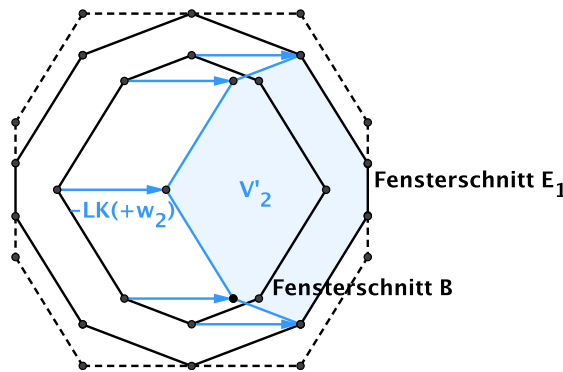


Abbildung 2.15.: Das Teilgebiet V'_{+2} auf der Ebene $E_1^{(5,-6)}$: Innerhalb des hellblau markierten Bereichs darf man den Projektionspunkt z_F eines Gitterpunktes $z \in (E + I^6) \subset \mathbb{R}^6$ in Richtung $+w_2$ verschieben, ohne das Fenster V zu verlassen.

2. Das Fenster V

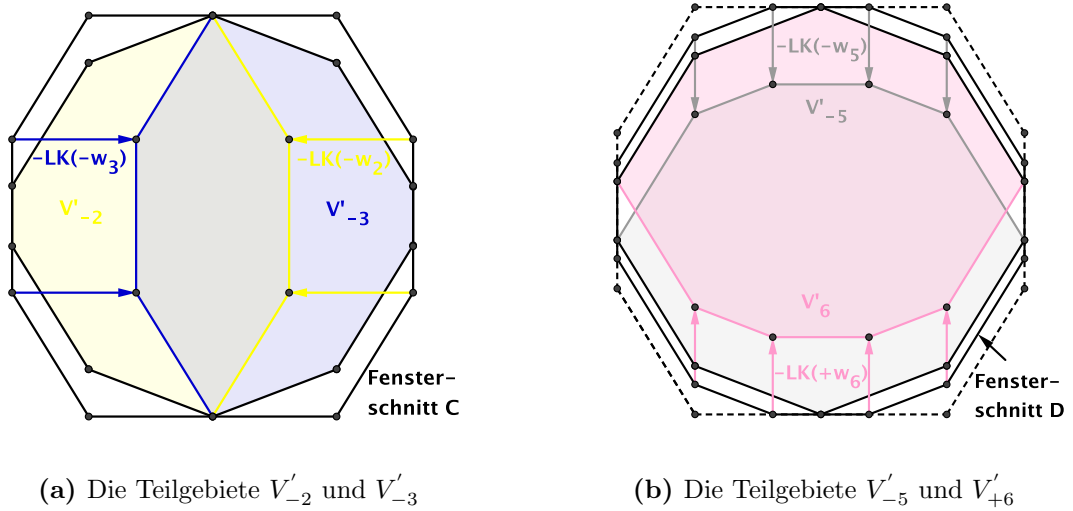


Abbildung 2.16.: Die Teilgebiete V'_{-2} und V'_{-3} bzw. V'_{-5} und V'_{+6} auf der Ebene $E_1^{(5,-6)}$

Bemerkungen zu Abbildung 2.16:

- Innerhalb des hellgelb markierten Bereichs darf man den Projektionspunkt z_F in Richtung $-w_2$ verschieben, ohne das Fenster V zu verlassen.
- Innerhalb des blau markierten Bereichs darf man den Projektionspunkt z_F in Richtung $-w_3$ verschieben, ohne das Fenster V zu verlassen.
- Innerhalb des grau markierten Bereichs darf man den Projektionspunkt z_F in Richtung $-w_5$ verschieben, ohne das Fenster V zu verlassen.
- Innerhalb des rosa markierten Bereichs darf man den Projektionspunkt z_F in Richtung $+w_6$ verschieben, ohne das Fenster V zu verlassen.

Analog zu den Beispielbetrachtungen im \mathbb{R}^2 ergibt der Schnitt all dieser in den Abbildungen 2.11 und 2.14 sowie 2.15 und 2.16 konstruierten Teilgebiete, d. h. der Schnitt der Teilgebiete $V'_{\pm 1}$ und $V'_{\pm 2}$ sowie $V'_{\pm 3}$ und $V'_{\pm 4}$ sowie V'_{-5} und V'_{+6} , die Zerlegung der Ebene $E_{1+}^{(5,-6)}$ in disjunkte Gebiete, vgl. hierzu die Beobachtungen 2.4 und 2.5.

Bemerkungen zu Abbildung 2.17:

- Die Zahl innerhalb der einzelnen Gebiete gibt Auskunft über die jeweils erlaubte Anzahl von Einheitsrichtungen $\pm w_i$ mit $1 \leq i \leq 6$, in die der Projektionspunkt z_F eines Gitterpunktes $z \in (E + I^6) \subset \mathbb{R}^6$ verschoben werden darf, ohne das Fenster V zu verlassen.
- Der zusätzliche Index jeder Zahl dient zur Unterscheidung der Gebiete, die zwar die gleiche Anzahl von Verschiebungen erlauben, jedoch in einer jeweils anderen Kombination von Einheitsrichtungen $\pm w_i$ mit $1 \leq i \leq 6$.

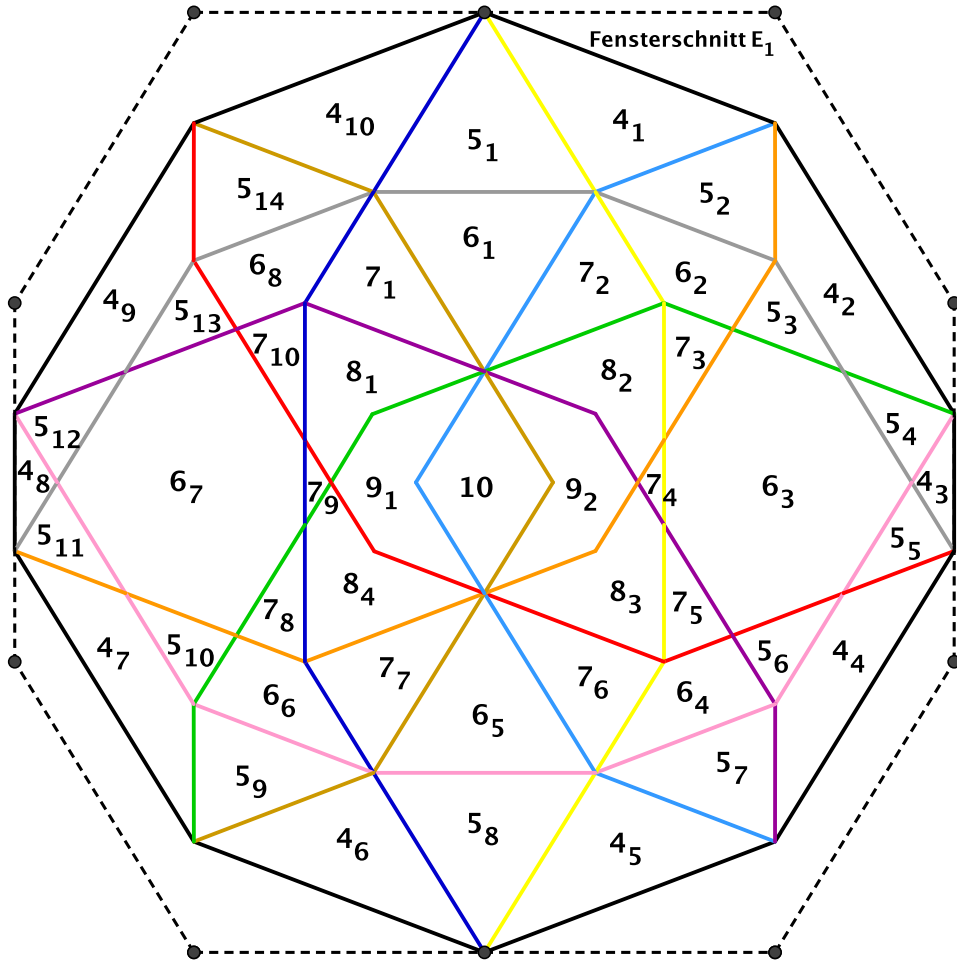


Abbildung 2.17.: Der Schnitt aller auf der Ebene $E_{1+}^{(5,-6)}$ existierenden Teilgebiete. Die Farben entsprechen dabei den in den jeweiligen Konstruktionsbildern verwendeten Farben.

Tabelle 2.1 nennt für den Projektionspunkt z_F die in den einzelnen Gebieten jeweils konkret erlaubten Verschiebungen von Einheitsvektoren $\pm w_1, \dots, \pm w_6$. Mit Äquivalenz-Kriterium 2.1 erhält man schließlich wieder verschiedene Konstellationen von Nachbarpunkten eines Gitterpunktes $z \in (E + I^6) \subset \mathbb{R}^6$ und damit die Eckentypen im Fall des dreidimensionalen Penrose-Musters: Für $z_F \in E_{1+}^{(5,-6)}$ kann der entsprechende Gitterpunkt $z \in (E + I^6) \subset \mathbb{R}^6$ zwischen vier und zehn Nachbarpunkte $z \pm e_i$ mit $1 \leq i \leq 6$ besitzen, welche ebenfalls innerhalb des Streifens $(E + I^6) \subset \mathbb{R}^6$ liegen und folglich auf E projiziert werden. Wie bei den Beispielbetrachtungen im \mathbb{R}^2 sollen aber auch in diesem Fall Kongruenzen nicht unterschieden werden. Wir müssen daher fragen: Welche der in Abbildung 2.17 aufgeführten Gebiete mit der gleichen Anzahl von möglichen Verschiebungen von Einheitsrichtungen $\pm w_1, \dots, \pm w_6$ führen auch wirklich zu nicht-kongruenten Konstellationen von erlaubten Nachbarpunkten?

2. Das Fenster V

Gebiet	Einheitsrichtungen	Gebiet	Einheitsrichtungen
4_1	$-w_1, -w_3, -w_4, +w_6$	6_1	$-w_1, -w_2, -w_3, -w_4, -w_5, +w_6$
4_2	$-w_1, +w_2, -w_3, +w_6$	6_2	$-w_1, +w_2, -w_3, -w_4, -w_5, +w_6$
4_3	$-w_1, +w_2, -w_3, +w_4$	6_3	$-w_1, +w_2, -w_3, +w_4, -w_5, +w_6$
4_4	$+w_2, -w_3, +w_4, -w_5$	6_4	$+w_1, +w_2, -w_3, +w_4, -w_5, +w_6$
4_5	$+w_1, -w_3, +w_4, -w_5$	6_5	$+w_1, -w_2, -w_3, +w_4, -w_5, +w_6$
4_6	$+w_1, -w_2, +w_4, -w_5$	6_6	$+w_1, -w_2, +w_3, +w_4, -w_5, +w_6$
4_7	$+w_1, -w_2, +w_3, -w_5$	6_7	$+w_1, -w_2, +w_3, -w_4, -w_5, +w_6$
4_8	$+w_1, -w_2, +w_3, -w_4$	6_8	$-w_1, -w_2, +w_3, -w_4, -w_5, +w_6$
4_9	$-w_2, +w_3, -w_4, +w_6$	7_1	$-w_1, -w_2, \pm w_3, -w_4, -w_5, +w_6$
4_{10}	$-w_1, -w_2, -w_4, +w_6$	7_2	$-w_1, \pm w_2, -w_3, -w_4, -w_5, +w_6$
5_1	$-w_1, -w_2, -w_3, -w_4, +w_6$	7_3	$-w_1, +w_2, -w_3, \pm w_4, -w_5, +w_6$
5_2	$-w_1, +w_2, -w_3, -w_4, +w_6$	7_4	$-w_1, \pm w_2, -w_3, +w_4, -w_5, +w_6$
5_3	$-w_1, +w_2, -w_3, -w_5, +w_6$	7_5	$\pm w_1, +w_2, -w_3, +w_4, -w_5, +w_6$
5_4	$-w_1, +w_2, -w_3, +w_4, +w_6$	7_6	$+w_1, \pm w_2, -w_3, +w_4, -w_5, +w_6$
5_5	$-w_1, +w_2, -w_3, +w_4, -w_5$	7_7	$+w_1, -w_2, \pm w_3, +w_4, -w_5, +w_6$
5_6	$+w_2, -w_3, +w_4, -w_5, +w_6$	7_8	$+w_1, -w_2, +w_3, \pm w_4, -w_5, +w_6$
5_7	$+w_1, +w_2, -w_3, +w_4, -w_5$	7_9	$+w_1, -w_2, \pm w_3, -w_4, -w_5, +w_6$
5_8	$+w_1, -w_2, -w_3, +w_4, -w_5$	7_{10}	$\pm w_1, -w_2, +w_3, -w_4, -w_5, +w_6$
5_9	$+w_1, -w_2, +w_3, +w_4, -w_5$	8_1	$\pm w_1, -w_2, \pm w_3, -w_4, -w_5, +w_6$
5_{10}	$+w_1, -w_2, +w_3, -w_5, +w_6$	8_2	$-w_1, \pm w_2, -w_3, \pm w_4, -w_5, +w_6$
5_{11}	$+w_1, -w_2, +w_3, -w_4, -w_5$	8_3	$\pm w_1, \pm w_2, -w_3, +w_4, -w_5, +w_6$
5_{12}	$+w_1, -w_2, +w_3, -w_4, +w_6$	8_4	$+w_1, -w_2, \pm w_3, \pm w_4, -w_5, +w_6$
5_{13}	$-w_2, +w_3, -w_4, -w_5, +w_6$	9_1	$\pm w_1, -w_2, \pm w_3, \pm w_4, -w_5, +w_6$
5_{14}	$-w_1, -w_2, +w_3, -w_4, +w_6$	9_2	$\pm w_1, \pm w_2, -w_3, \pm w_4, -w_5, +w_6$
		10	$\pm w_1, \pm w_2, \pm w_3, \pm w_4, -w_5, +w_6$

Tabelle 2.1.: Die auf der Ebene $E_{1+}^{(5,-6)}$ in den einzelnen Gebieten erlaubten Einheitsrichtungen $\pm w_i$ mit $1 \leq i \leq 6$

Beobachtung 2.16. Auf $E_{1+}^{(5,-6)}$ existiert für die Anzahlen 4, 5, 7, 8, 9, 10 von möglichen Verschiebungen von Einheitsvektoren $\pm w_i$ eines Projektionspunktes z_F mit $1 \leq i \leq 6$ jeweils nur eine nicht-kongruente Konstellation von erlaubten Nachbarpunkten. Damit gibt es auf $E_{1+}^{(5,-6)}$ je ein Gebiet des Typs Ω'_4 und Ω'_5 sowie Ω'_7 und Ω'_8 sowie Ω'_9 und Ω'_{10} :

$$z \in \mathbb{Z}^6 \subset \mathbb{R}^6 \text{ heißt Ecke des Typs } \omega_j \iff z_F \in \Omega'_j \text{ mit } j = 4, 5, 7, 8, 9, 10.$$

Beweis. Statt im nicht-anschaulichen Ausgangsraum $W \cong \mathbb{R}^6$ können wir wegen den Kriterien 2.1 und 2.2 alternativ auch im Hilfsraum $F \cong \mathbb{R}^3$ bzw. im Projektionsraum $E \cong \mathbb{R}^3$ arbeiten. Die Überprüfung auf Kongruenzen ist damit anschaulich lösbar und muss für jedes der in Tabelle 2.1 aufgeführten Gebiete im Einzelnen geschehen. Zum Gebiet des Typs Ω'_j zählen dabei genau die Gebiete in Abbildung 2.17, deren Anzahl von erlaubten Verschiebungen von Einheitsrichtungen $\pm w_i$ mit $1 \leq i \leq 6$ gleich j ist. \square

Anders dagegen gestaltet sich die Situation, wenn man den Projektionspunkt z_F eines Gitterpunktes $z \in (E + I^6) \subset \mathbb{R}^6$ auf der Ebene $E_{1+}^{(5,-6)}$ in genau sechs weitere Einheitsrichtungen $\pm w_i$ mit $1 \leq i \leq 6$ verschieben darf, ohne das Fenster V zu verlassen.

Beobachtung 2.17. Auf $E_{1+}^{(5,-6)}$ existieren für z_F zwei nicht-kongruente Konstellationen von jeweils sechs Nachbarpunkten. Folglich gibt es in diesem Fall zwei verschiedene Typen des Gebiets Ω'_6 , die mit Ω'_{6a} und Ω'_{6b} bezeichnet werden sollen:

$$z \in \mathbb{Z}^6 \subset \mathbb{R}^6 \text{ heißt Ecke des Typs } \omega_j \iff z_F \in \Omega'_j \text{ mit } j = 6_a, 6_b.$$

Beweis. Analog zum Beweis zu Beobachtung 2.16 müssen die einzelnen Gebiete in Abbildung 2.17, die die Verschiebung des Projektionspunktes z_F in sechs Einheitsrichtungen $\pm w_i$ mit $1 \leq i \leq 6$ erlauben, auf Kongruenzen überprüft werden. Dabei erhält man: Die Gebiete 6_1 und 6_3 sowie 6_5 und 6_7 besitzen eine andere nicht-kongruente Konstellation von jeweils sechs erlaubten Nachbarpunkten als die Gebiete 6_2 und 6_4 sowie 6_6 und 6_8 , was bedeutet, dass es zwei Gebiete des Typs Ω'_6 , genannt Ω'_{6a} und Ω'_{6b} gibt. \square

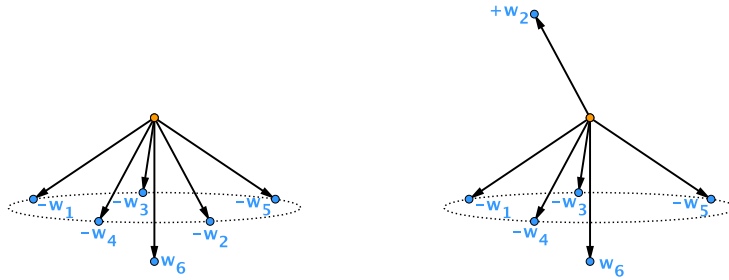


Abbildung 2.18.: Links eine Ecke des Typs ω_{6a} und rechts eine Ecke des Typs ω_{6b} im Hilfsraum F . Genauer: Bei der linken Ecke liegt der Projektionspunkt z_F in Abbildung 2.17 in dem mit 6_1 , bei der rechten Ecke in dem mit 6_2 markierten Gebiet.

Fasst man all diese Ergebnisse zusammen, so erhält man die Einteilung der Ebene $E_{1+}^{(5,-6)}$ in die verschiedenen Gebiete Ω'_j mit $j = 4, 5, 6_a, 6_b, 7, 8, 9, 10$, vgl. Abbildung 2.19. Gebiete gleichen Typs sind dabei in der gleichen Farbe markiert, siehe Tabelle 2.2.

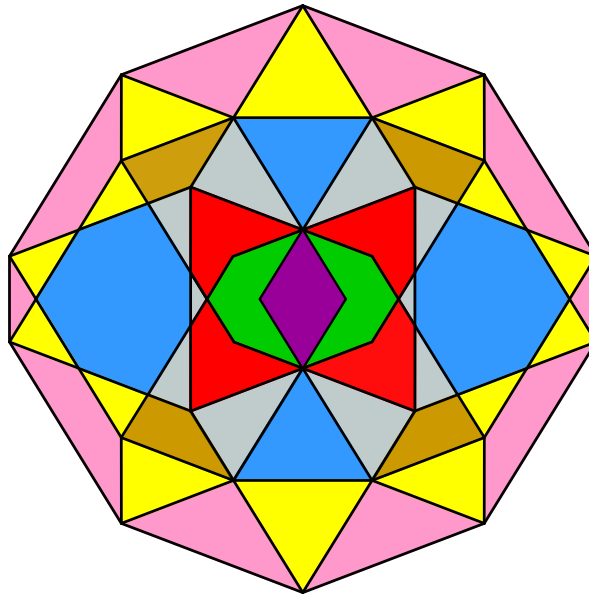


Abbildung 2.19.: Die Gebietseinteilung der Ebene $E_{1+}^{(5,-6)}$: Gebiete gleichen Typs sind in der gleichen Farbe markiert, siehe Tabelle 2.2.

Gebiet	Farbe	Gebiet	Farbe	Gebiet	Farbe
Ω_4	Rosa	Ω_5	Gelb	Ω_{6a}	Blau
Ω_{6b}	Braun	Ω_7	Grau	Ω_8	Rot
Ω_9	Grün	Ω_{10}	Lila	Ω_{12}	Orange

Tabelle 2.2.: Übersicht über die Farben zur Kennzeichnung der unterschiedlichen Gebiete

Die (Teil-) Gebiete der Ebene $E_{1-}^{(5,-6)}$:

Zusätzlich zu den Teilgebieten der Ebene $E_{1+}^{(5,-6)}$ existieren noch die beiden Teilgebiete V'_{+5} und V'_{-6} , vgl. Beobachtung 2.13 sowie die Überlegungen auf Seite 47. Um diese Teilgebiete mit Hilfe des Konstruktionsprinzips 2.15 zu ermitteln, benötigen wir nach Abbildung 2.13 den Schnitt der Ebene $A^{(5,-6)}$ mit dem Fenster V , genauer gesagt den Schnitt der Ebene $A^{(5,-6)}$ mit dem Rand von V . Weil das Fenster die Gestalt eines Rhombentriakontaeders besitzt, ist jedoch sofort klar, wie der gesuchte Fensterschnitt \mathcal{A} aussehen muss: Er hat die Gestalt der Fensterraute R . Mit diesem Wissen lassen sich die gesuchten beiden Teilgebiete ganz analog zum Vorgehen im Fall des Teilgebiets V'_{+3} konstruieren.

Bemerkungen zu Abbildung 2.20:

- Innerhalb des grün markierten Bereichs darf man den Projektionspunkt z_F in Richtung $+w_5$ verschieben, ohne das Fenster V zu verlassen.

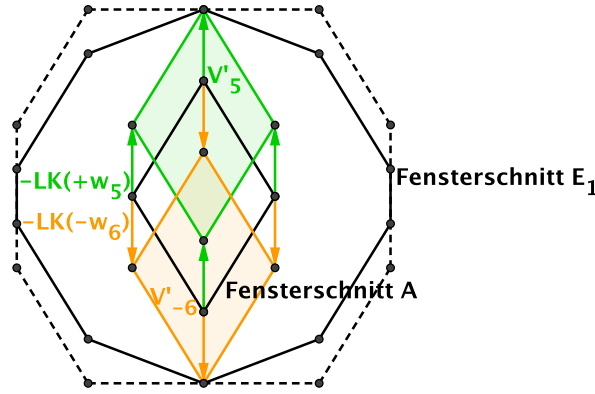


Abbildung 2.20.: Die Teilgebiete V'_{+5} und V'_{-6} auf der Ebene $E_{1-}^{(5,-6)}$

- Innerhalb des gelb markierten Bereichs darf man den Projektionspunkt z_F in Richtung $-w_6$ verschieben, ohne das Fenster V zu verlassen.

Um die Gebietseinteilung auf der Ebene $E_{1-}^{(5,-6)}$ zu bestimmen, müssen wir wieder den Schnitt aller auf dieser Ebene existierenden Teilgebiete ermitteln, und folglich Abbildung 2.17 um die zusätzlichen Teilgebiete V'_{+5} und V'_{-6} ergänzen, siehe Abbildung 2.21.

Bemerkungen zu Abbildung 2.21:

- Ein Vergleich mit Abbildung 2.17 zeigt: Es haben sich nicht alle Gebiete geändert. Die schwarz nummerierten Gebiete sind identisch mit denen auf der Ebene $E_{1+}^{(5,-6)}$, lediglich die rot markierten Gebiete sind neu. Innerhalb dieser roten Gebiete sind im Unterschied zum Fall der Ebene $E_{1+}^{(5,-6)}$ für den Projektionspunkt z_F noch eine bzw. zwei zusätzliche Verschiebungen von Einheitsvektoren erlaubt, nämlich gerade die um die Einheitsvektoren $+w_5$ bzw. $-w_6$.
- Beispielsweise unterscheidet sich das Gebiet 6_9 in Abbildung 2.21 von dem Gebiet 5_1 in Abbildung 2.17 gerade darin, dass in diesem Fall neben den Verschiebungen in Richtung $-w_1$ und $-w_2$ sowie $-w_3$ und $-w_4$ sowie $+w_6$ auch die Verschiebung von z_F in Richtung $+w_5$ zugelassen ist, ohne das Fenster V zu verlassen.
- Im Unterschied zur Ebene $E_{1+}^{(5,-6)}$ existiert auf $E_{1-}^{(5,-6)}$ auch ein mit 12 markiertes Gebiet, d. h. ein Gebiet, innerhalb dessen man den Projektionspunkt z_F eines Gitterpunktes $z \in (E + I^6) \subset \mathbb{R}^6$ in alle möglichen 12 Einheitsrichtungen $\pm w_i$ mit $1 \leq i \leq 6$ verschieben darf, ohne das Fenster V zu verlassen. In Abbildung 2.17 waren in dem gleichen Gebiet dagegen die Verschiebungen in Richtung $+w_5$ und $-w_6$ nicht erlaubt.²⁰

²⁰Genauer: Das Gebiet Ω'_{12} auf der Ebene $E_{1-}^{(5,-6)}$ hat die Gestalt einer um den Faktor φ^2 verkleinerten Fensterraute. Wir sehen in Abbildung 2.21 also gerade eine der 30 Begrenzungsflächen des Kerns von V , vgl. Beobachtung 2.6.

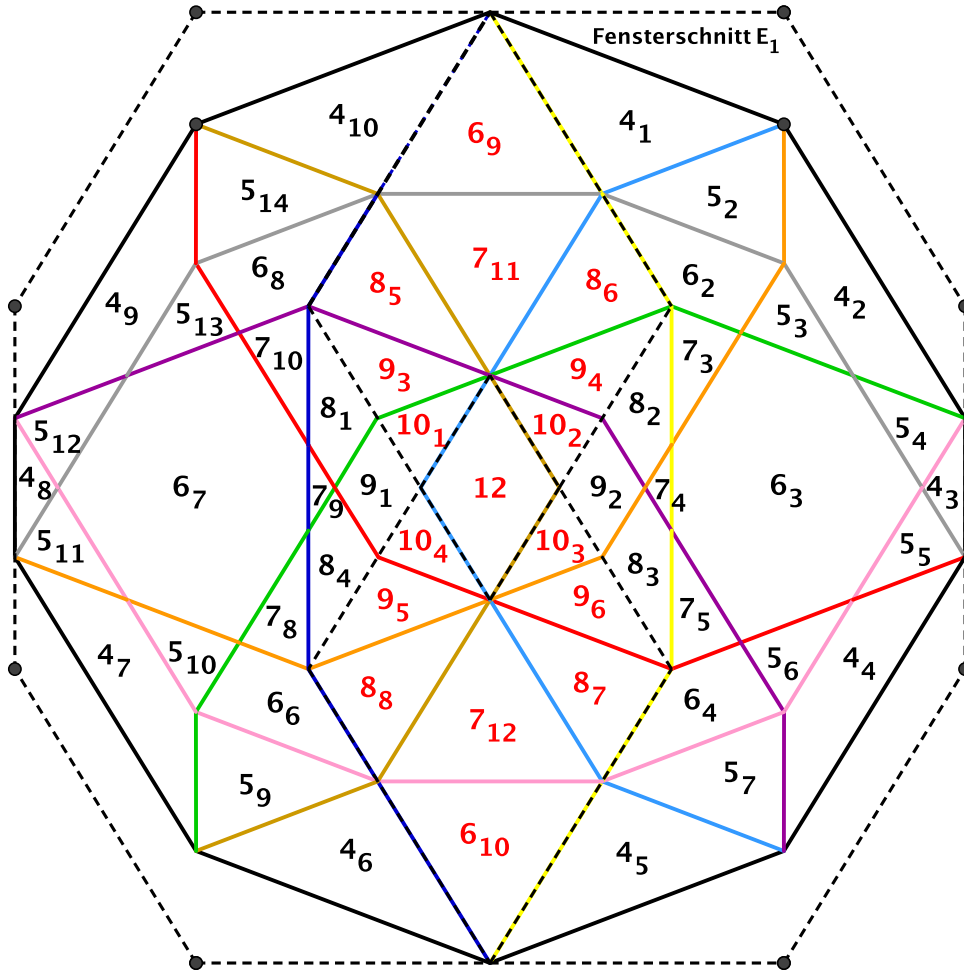


Abbildung 2.21.: Der Schnitt aller auf der Ebene $E_{1-}^{(5,-6)}$ existierenden Teilgebiete. Schwarz gestrichelt eingezeichnet sind die beiden neu hinzukommenden Teilgebiete V'_{+5} und V'_{-6} , vgl. Abbildung 2.20. In den übrigen Fällen entsprechen die Farben wieder den in den jeweiligen Konstruktionsbildern verwendeten Farben.

Tabelle 2.3 gibt Auskunft über die in den rot markierten Gebieten jeweils erlaubten Verschiebungen des Projektionspunktes z_F in die Einheitsvektoren $\pm w_i$ mit $1 \leq i \leq 6$:

Gebiet	Einheitsrichtungen	Gebiet	Einheitsrichtungen
6 ₉	$-w_1, -w_2, -w_3, -w_4, +w_5, +w_6$	9 ₃	$\pm w_1, -w_2, \pm w_3, -w_4, \pm w_5, +w_6$
6 ₁₀	$+w_1, -w_2, -w_3, +w_4, -w_5, -w_6$	9 ₄	$-w_1, \pm w_2, -w_3, \pm w_4, \pm w_5, +w_6$
7 ₁₁	$-w_1, -w_2, -w_3, -w_4, \pm w_5, +w_6$	9 ₅	$+w_1, -w_2, \pm w_3, \pm w_4, -w_5, \pm w_6$
7 ₁₂	$+w_1, -w_2, -w_3, +w_4, -w_5, \pm w_6$	9 ₆	$\pm w_1, \pm w_2, -w_3, +w_4, -w_5, \pm w_6$
8 ₅	$-w_1, -w_2, \pm w_3, -w_4, \pm w_5, +w_6$	10 ₁	$\pm w_1, -w_2, \pm w_3, \pm w_4, \pm w_5, +w_6$
8 ₆	$-w_1, \pm w_2, -w_3, -w_4, \pm w_5, +w_6$	10 ₂	$\pm w_1, \pm w_2, -w_3, \pm w_4, \pm w_5, +w_6$
8 ₇	$+w_1, \pm w_2, -w_3, +w_4, -w_5, \pm w_6$	10 ₃	$\pm w_1, \pm w_2, -w_3, \pm w_4, -w_5, \pm w_6$
8 ₈	$+w_1, -w_2, \pm w_3, +w_4, -w_5, \pm w_6$	10 ₄	$\pm w_1, -w_2, \pm w_3, \pm w_4, -w_5, \pm w_6$

Tabelle 2.3.: Die auf der Ebene $E_{1-}^{(5,-6)}$ in den rot markierten Gebieten erlaubten Einheitsrichtungen $\pm w_i$ mit $1 \leq i \leq 6$

Die Frage, die sich damit stellt, lautet: Sind die Konstellationen von erlaubten Nachbarpunkten $\pm w_i$ mit $1 \leq i \leq 6$ des Projektionspunktes z_F , die im Fall der Ebene $E_{1-}^{(5,-6)}$ neu hinzukommen, d. h. die Konstellationen von erlaubten Nachbarpunkten der rot gekennzeichneten Gebiete in Abbildung 2.21, kongruent zu den bereits bekannten Konstellationen von erlaubten Nachbarpunkten der schwarz markierten Gebiete?

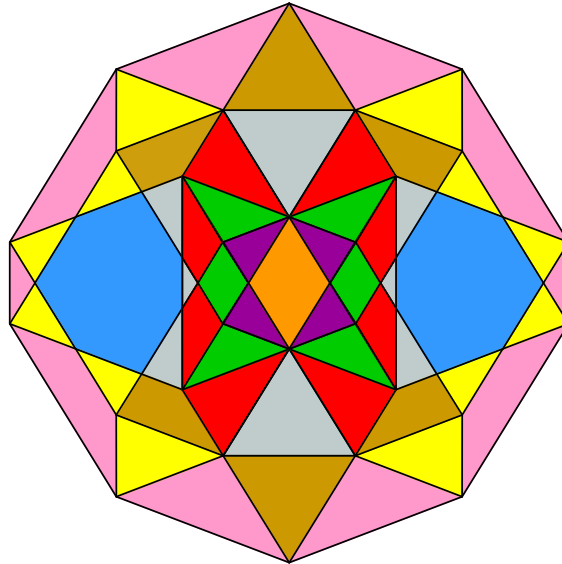


Abbildung 2.22.: Die Gebietseinteilung der Ebene $E_{1-}^{(5,-6)}$: Gebiete gleichen Typs sind in der gleichen Farbe markiert, siehe Tabelle 2.2.

2. Das Fenster V

Beobachtung 2.18. Neben den bekannten Eckentypen ω_j mit $j = 4, 5, 6_a, 6_b, 7, 8, 9, 10$ der Ebene $E_{1+}^{(5,-6)}$ existiert auf $E_{1-}^{(5,-6)}$ noch zusätzlich das Gebiet Ω'_{12} und somit der Eckentyp ω_{12} .

Beweis. Analog zum Beweis zu Beobachtung 2.16 müssen auch hier die neu hinzukommenden Konstellationen von erlaubten Nachbarpunkten $\pm w_i$ mit $1 \leq i \leq 6$ des Projektionspunktes z_F der rot markierten Gebiete im Einzelnen auf Kongruenzen mit den schon bekannten Eckentypen ω_j mit $j = 4, 5, 6_a, 6_b, 7, 8, 9, 10$ der Ebene $E_{1+}^{(5,-6)}$ untersucht werden.

Der Fall, dass der Projektionspunkt z_F tatsächlich in alle 12 möglichen Einheitsrichtungen $\pm w_i$ mit $1 \leq i \leq 6$ verschoben werden darf, ohne das Fenster V zu verlassen, ist zwar bereits aus den Überlegungen in 2.2.1 bekannt, jedoch existiert ein solches Gebiet Ω'_{12} auf der Ebene $E_{1+}^{(5,-6)}$ nicht und somit kommt der Eckentyp ω_{12} auf $E_{1-}^{(5,-6)}$ neu hinzu. Insgesamt erhalten wir damit die in Abbildung 2.22 dargestellte Situation. \square

Die restlichen Teilgebiete und die Gebietseinteilung für $E_{2+}^{(5,-6)}$ und $E_{2-}^{(5,-6)}$:

Um auch hier Konstruktionsprinzip 2.15 anwenden zu können, muss analog zum Vorgehen bezüglich der Ebene $E_1^{(5,-6)}$ zunächst geklärt werden, wo die Verschiebungen der Ebene $E_2^{(5,-6)}$ in Richtung der Höhenkomponenten von $\pm w_2$ und $\pm w_3$ sowie $\pm w_5$ und $\pm w_6$ liegen, welche dieser verschobenen Ebenen das Fenster V tatsächlich schneiden und für welche Einheitsrichtungen eine Fallunterscheidung in die Ebenen $E_{2-}^{(5,-6)}$ und $E_{2+}^{(5,-6)}$ notwendig ist.

Wie im Fall der Ebene $E_1^{(5,-6)}$ sind auch diese Fragen bereits im Beweis zu Beobachtung 2.13 beantwortet worden. Wir vervollständigen Abbildung 2.9 und fassen die bisherigen Ergebnisse zusammen:

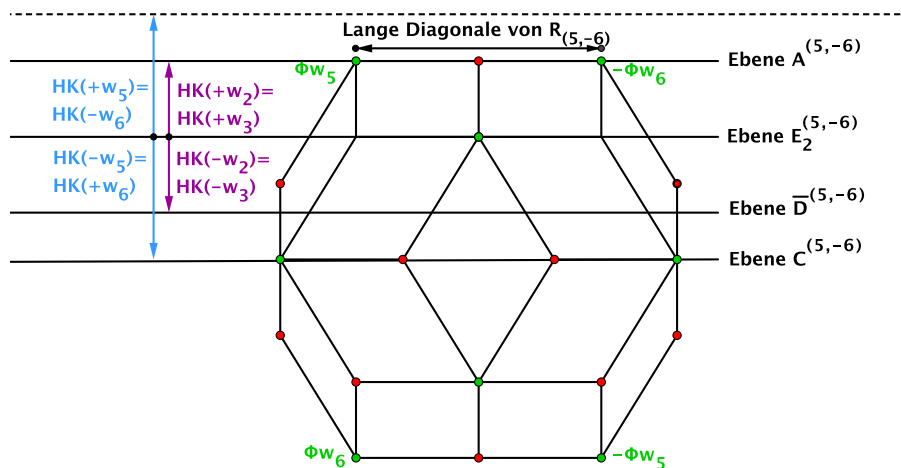


Abbildung 2.23.: Diese Ebenen werden zur Konstruktion der Teilgebiete auf $E_2^{(5,-6)}$ benötigt.

Die Verschiebung der Ebene $E_2^{(5,-6)}$ um

- die Höhenkomponente von $+w_5$ und $-w_6$ schneidet das Fenster V offensichtlich nicht. Die Teilgebiete V'_{+5} und V'_{-6} existieren damit auf $E_2^{(5,-6)}$ nicht.

- die Höhenkomponente von $+w_2$ und $+w_3$ ergibt die Ebene $A^{(5,-6)}$, welche bereits aus Abbildung 2.13 bekannt ist. Die Teilgebiete V'_{+2} und V'_{+3} existieren folglich nur auf der Ebene $E_{2-}^{(5,-6)}$, auf $E_{2+}^{(5,-6)}$ dagegen nicht.
- die Höhenkomponente von $-w_5$ und $+w_6$ ergibt die Ebene $C^{(5,-6)}$, welche ebenfalls aus Abbildung 2.13 bekannt ist.
- die Höhenkomponente von $-w_2$ und $-w_3$ ergibt die Ebene $\overline{D}^{(5,-6)}$. Zur Bezeichnung dieser Ebene mit \overline{D} statt mit einem bisher nicht verwendeten neuen Buchstaben siehe untenstehende Hilfsbeobachtung.

Hilfsbeobachtung 1. Die Ebene $\overline{D}^{(5,-6)}$ ist identisch mit der Ebene $D^{(-5,6)}$.

Beweis. Die Fensterrauten $R_{(5,-6)}$ und $R_{(-5,6)}$ werden von zueinander antipodalen Eckpunkten gebildet und liegen einander somit im Fenster V gerade gegenüber. Folglich sind alle Ebenen parallel zu Raute $R_{(5,-6)}$ auch parallel zu $R_{(-5,6)}$. Dass nun die Verschiebung der Ebene $E_2^{(5,-6)}$ in Richtung der Höhenkomponente von $-w_2$ und $-w_3$ gerade identisch ist mit der Verschiebung der Ebene $E_1^{(-5,6)}$ in Richtung der Höhenkomponenten von $+w_5$ und $-w_6$, welche wir mit $D^{(-5,6)}$ bezeichnen, kann wiederum graphisch gezeigt werden:

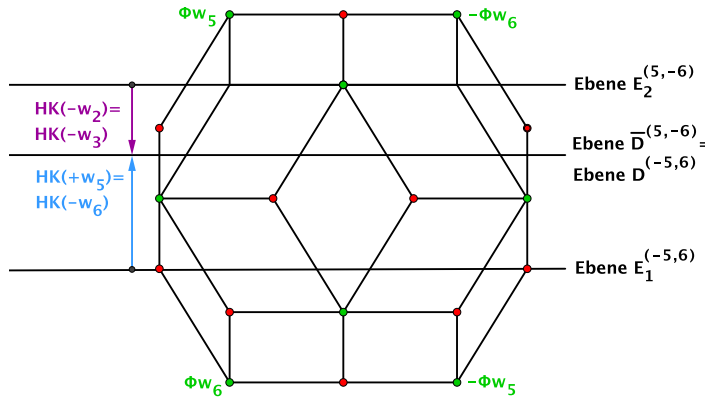


Abbildung 2.24.: Die Ebene $\overline{D}^{(5,-6)}$ ist identisch mit der Ebene $D^{(-5,6)}$.

□

Bemerkung. Diese Überlegung gilt natürlich ganz allgemein für jede der 30 Fensterrauten $R_{(\pm m, \pm n)}$ mit $m, n \in \{1, \dots, 6\}$ und $m < n$ sowie für alle bereits bekannten Ebenentypen. Lernen wir in den folgenden Konstruktionen jeweils eine neue Ebene kennen, so müssen wir demnach immer erst überprüfen, ob wir diese Ebene nicht bereits durch die zu der betrachteten Fensterraute gegenüberliegende Raute implizit kennen, bevor wir einen neuen Namen vergeben!

Damit ist nun bekannt, welche Teilgebiete jeweils auf $E_{2-}^{(5,-6)}$ und $E_{2+}^{(5,-6)}$ existieren und welche Fensterschnitte zur Konstruktion gemäß Konstruktionsprinzip 2.15 notwendig sind: Dies sind die Fensterschnitte \mathcal{A} und \mathcal{C} sowie der Fensterschnitt \mathcal{D} .

Die (Teil-) Gebiete der Ebene $E_{2+}^{(5,-6)}$:

Neben den bereits konstruierten Teilgebieten $V'_{\pm 1}$ und $V'_{\pm 4}$ existieren auf $E_{2+}^{(5,-6)}$, wie weiter oben ausgeführt, noch die Teilgebiete V'_{-2} und V'_{-3} sowie V'_{-5} und V'_{+6} . Deren Konstruktion gemäß Konstruktionsprinzip 2.15 verläuft völlig analog zu der Konstruktion im Fall der Ebenen $E_{1+}^{(5,-6)}$ und $E_{1-}^{(5,-6)}$ und soll an dieser Stelle nicht gezeigt werden. Ebenso ergibt auch hier wieder der Schnitt all dieser Teilgebiete die Zerlegung der Ebene $E_{2+}^{(5,-6)}$ in disjunkte Gebiete. Überprüft man die dabei entstandenen Konstellationen von

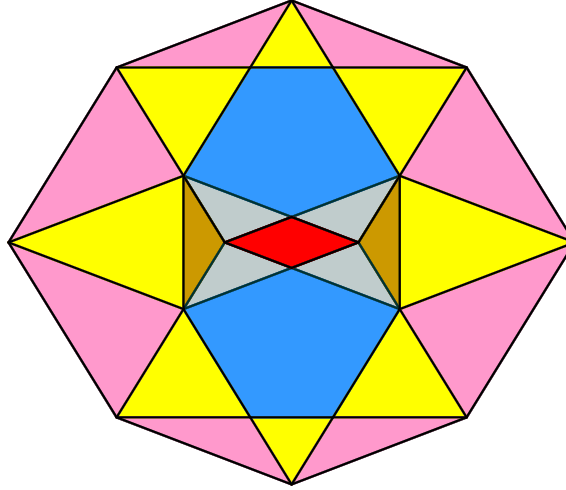


Abbildung 2.25.: Die Gebietseinteilung der Ebene $E_{2+}^{(5,-6)}$: Gebiete gleichen Typs sind in der gleichen Farbe markiert, siehe Tabelle 2.2.

erlaubten Nachbarpunkten $\pm w_i$ mit $1 \leq i \leq 6$ eines Projektionspunktes z_F auf Kongruenzen mit den schon bekannten Eckentypen aus den Beobachtungen 2.16 und 2.17 sowie 2.18, so erhält man die in Abbildung 2.25 dargestellte Situation. Die Farben der dort markierten Gebiete stimmen mit den in Abbildung 2.19 und 2.22 eingezeichneten Gebieten der Ebenen $E_{1-}^{(5,-6)}$ und $E_{1+}^{(5,-6)}$ überein, siehe auch Tabelle 2.2, was bedeutet, dass $E_{2+}^{(5,-6)}$ keine neuen Eckentypen liefert! Welche Einheitsrichtungen $\pm w_i$ mit $1 \leq i \leq 6$ jeweils ganz konkret in den einzelnen Gebieten erlaubt sind, findet sich in A.13.

Die (Teil-) Gebiete der Ebene $E_{2-}^{(5,-6)}$:

Zusätzlich zu den Teilgebieten der Ebene $E_{2+}^{(5,-6)}$ existieren hier noch die beiden Teilgebiete V'_{+2} und V'_{+3} , und wie im Fall der Ebenen $E_{1+}^{(5,-6)}$ und $E_{1-}^{(5,-6)}$ ändert sich somit auf $E_{2-}^{(5,-6)}$ wieder ein Teil der Gebiete der Ebene $E_{2+}^{(5,-6)}$: In diesen Gebieten darf der Projektionspunkt z_F eines Gitterpunktes $z \in (E + I^6) \subset \mathbb{R}^6$ noch zusätzlich in die Einheitsrichtungen $+w_2$ bzw. $+w_3$ verschoben werden.

Nach der erneuten Überprüfung auf Kongruenzen mit den schon bekannten Eckentypen aus den Beobachtungen 2.16 und 2.17 sowie 2.18 ergibt sich die in Abbildung 2.26 gezeigte Situation. Die in den einzelnen Gebieten jeweils konkret erlaubten Einheitsrich-

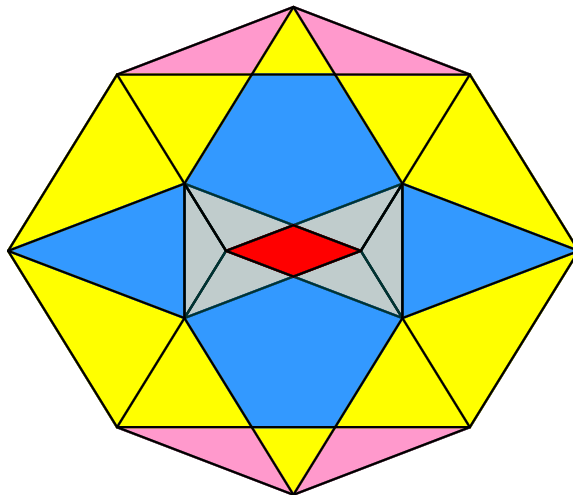


Abbildung 2.26.: Die Gebietseinteilung der Ebene $E_{2-}^{(5,-6)}$: Benachbarte gelbe bzw. graue Gebiete unterscheiden sich darin, welche der Einheitsrichtungen $\pm w_1, \dots, \pm w_6$ jeweils den Eckentyp realisieren. Gebiete gleichen Typs sind in der gleichen Farbe markiert, siehe Tabelle 2.2.

tungen $\pm w_i$ mit $1 \leq i \leq 6$ finden sich in A.14. Hinsichtlich der Frage nach neuen, bisher noch unbekannten Eckentypen liefert damit auch die Gebietseinteilung der Ebene $E_{2-}^{(5,-6)}$ keine neuen Ergebnisse. Wir halten fest:

Beobachtung 2.19. Die Gebietseinteilungen der Ebenen $E_{2+}^{(5,-6)}$ und $E_{2-}^{(5,-6)}$ enthalten keine anderen Gebietstypen als die bereits bekannten Gebiete der Ebenen $E_{1+}^{(5,-6)}$ und $E_{1-}^{(5,-6)}$, daher existieren auf diesen Ebenen auch keine zusätzlichen Eckentypen.

Schritt 2.2: Übertragung auf die restlichen Ebenen des Typs \mathcal{E}_1 und \mathcal{E}_2

Wie bereits erwähnt, können wir die bisher gewonnen Ergebnisse nun durch das in A.3 eingeführte Analogieprinzip A.6 auf alle anderen Ebenen des Typs \mathcal{E}_1 und \mathcal{E}_2 übertragen. Dabei ist die folgende Beobachtung wichtig:

Beobachtung 2.20. Die Gebietstypen $\Omega'_4, \dots, \Omega'_{12}$ ändern sich durch Analogiebetrachtungen nicht.

Beweis. Dies liegt an der Definition der Gebiete: Kongruente Konstellationen von Nachbarecken werden nicht unterschieden, und damit ändern sich auch die Gebietstypen durch Analogiebetrachtungen nicht. \square

Bemerkung. Gebiete des gleichen Typs unterscheiden sich darin, welche der Einheitsrichtungen $\pm w_1, \dots, \pm w_6$ die konkrete Ecke jeweils verwirklichen, die Gestalt der Ecke an sich ist jedoch – bis auf Kongruenzen – stets die gleiche! Abbildung 2.19 zeigt somit ganz allgemein die Gebietseinteilung der Ebene des Typs \mathcal{E}_{1+} , Abbildung 2.22 die Gebietseinteilung der Ebene des Typs \mathcal{E}_{1-} , Abbildung 2.25 die Gebietseinteilung der Ebene des Typs \mathcal{E}_{2+} und Abbildung 2.26 die Gebietseinteilung der Ebene des Typs \mathcal{E}_{2-} !

2. Das Fenster V

Bevor wir anhand dieser Ergebnisse Rückschlüsse auf die dreidimensionalen Gebiete im Fenster V ziehen, soll an einem konkreten Beispiel noch das angesprochene Prinzip der Analogiebetrachtung A.6 verdeutlicht werden. Wir wollen dazu klären: Wie lassen sich mittels der bisherigen Ergebnisse die jeweils erlaubten Einheitsrichtungen $\pm w_i$ mit $1 \leq i \leq 6$ für die Gebiete auf der Ebene $E_{1+}^{(-2,3)}$ ermitteln?

In diesem Fall entspricht Raute $R_{(-2,3)}$ nun der Raute $R_{(5,-6)}$ und damit übernimmt beispielsweise die Einheitsrichtung $-w_6$ für $R_{(-2,3)}$ die Rolle der Einheitsrichtung $+w_1$ im Fall von $R_{(5,-6)}$. Insgesamt ergeben sich für die Einheitsrichtungen $\pm w_i$ mit $1 \leq i \leq 6$ die in Tabelle 2.4 genannten Analogien.

Raute $R_{(5,-6)}$	Raute $R_{(-2,3)}$
$\pm w_1$	$\mp w_6$
$\pm w_2$	$\mp w_4$
$\pm w_3$	$\pm w_1$
$\pm w_4$	$\pm w_5$
$\pm w_5$	$\mp w_2$
$\pm w_6$	$\mp w_3$

Tabelle 2.4.: Diese Analogien ergeben sich zwischen Raute $R_{(5,-6)}$ und Raute $R_{(-2,3)}$.

Damit erhalten wir für einige exemplarisch ausgewählte Gebiete auf der Ebene $E_{1+}^{(-2,3)}$ die folgende Situation, siehe die Abbildungen 2.17 und 2.19 sowie Tabelle 2.1.

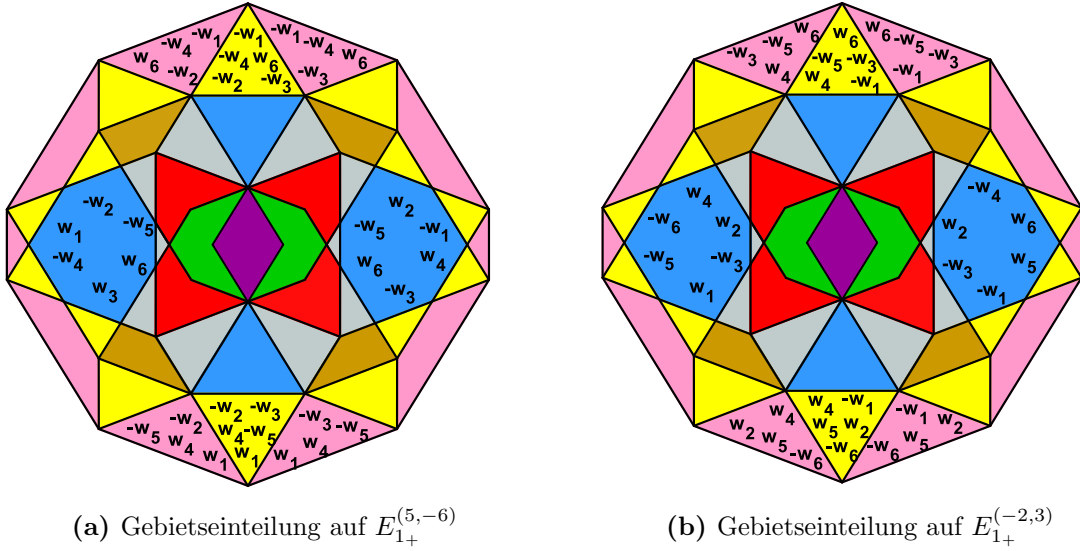


Abbildung 2.27.: Die unterschiedlichen Gebiete auf den Ebenen $E_{1+}^{(5,-6)}$ und $E_{1+}^{(-2,3)}$: In den einzelnen Gebieten stehen jeweils die Einheitsrichtungen, in die der Projektionspunkt z_F eines Gitterpunktes $z \in (E + I^6) \subset \mathbb{R}^6$ auf der entsprechenden Ebene verschoben werden darf, ohne das Fenster V zu verlassen.

Schritt 3: Rückschlüsse auf die Gebiete im Fenster V

Mit Hilfe all dieser Ergebnisse ist es nun möglich, Rückschlüsse auf die dreidimensionalen Gebiete im Fenster V zu ziehen, vgl. Beobachtung 2.9.

Beobachtung 2.21. *Im Fenster V existieren insgesamt neun verschiedene Gebietstypen Ω_j mit $j = 4, 5, 6_a, 6_b, 7, 8, 9, 10, 12$. Im Fall des dreidimensionalen Penrose-Musters gibt es somit neun verschiedene nicht-kongruente Konstellationen von erlaubten Nachbarpunkten eines Gitterpunktes $z \in (E + I^6) \subset \mathbb{R}^6$, genannt Eckentypen:*

$z \in \mathbb{Z}^6 \subset \mathbb{R}^6$ heißt Ecke des Typs $\omega_j \iff z_F \in \Omega_j$, wobei $j = 4, 5, 6_a, 6_b, 7, 8, 9, 10, 12$.

Bemerkung. Wie schon im Fall der Beispielbetrachtungen im \mathbb{R}^2 soll für die Projektionspunkte z_F im Hilfsraum F und z_E im Projektionsraum E wieder gelten:

$z_E \in E$ und $z_F \in F$ heißen Ecke des Typs $\omega_j \iff z_F \in \Omega_j$ mit $j = 4, 5, 6_a, 6_b, 7, 8, 9, 10, 12$. Gerade hier ist diese Konvention unverzichtbar, denn im Folgenden werden wir stets im Hilfsraum $F \cong \mathbb{R}^3$ oder im Projektionsraum $E \cong \mathbb{R}^3$, nicht aber im unanschaulichen Ausgangsraum $W \cong \mathbb{R}^6$ arbeiten.

Da die Projektionen der Einheitsvektoren $\pm e_i$ mit $1 \leq i \leq 6$ des Ausgangsraums W auf E und F nach den Beobachtungen 1.5 und 1.10 wieder Ikosaederecken sind, lassen sich die unterschiedlichen Eckentypen im Fall des dreidimensionalen Penrose-Musters leicht anhand des Ikosaeders veranschaulichen. Abschließend soll daher noch eine Übersicht über die Gestalt der Eckentypen ω_j mit $j = 4, 5, 6_a, 6_b, 7, 8, 9, 10, 12$ im Projektionsraum E gegeben werden, indem wir mit Hilfe der folgenden Zeichnung exemplarisch jeden Eckentyp einmal aufzeigen, siehe Tabelle 2.5.

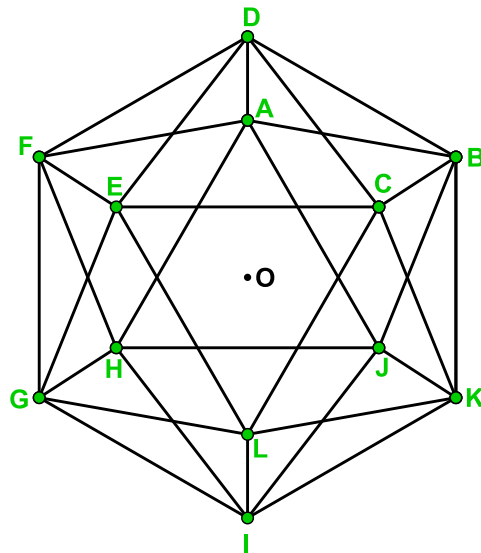


Abbildung 2.28.: Ikosaeder mit den Ecken A bis L

Eckentyp	Ikosaederecken
ω_4	A, B, E, I
ω_5	A, B, C, E, I
ω_{6a}	A, B, C, E, F, I
ω_{6b}	A, B, C, E, K, I
ω_7	A, B, C, E, F, K, I
ω_8	A, B, C, E, F, G, K, I
ω_9	$A, B, C, E, F, G, J, K, I$
ω_{10}	$A, B, C, E, F, G, H, J, K, I$
ω_{12}	alle Ikosaederecken

Tabelle 2.5.: Die Koordinaten der einzelnen Eckentypen in Bezug auf Abbildung 2.28

2.2.3. Überlegungen zur Anordnung der Pflastersteine

Die Ermittlung der Gebiete im Fenster V ist ein wichtiger Schritt im Hinblick auf die Frage nach der Unterteilung des flachen und des langen Pflastersteins des dreidimensionalen Penrose-Musters: Wir haben nun alle nötigen Hilfsmittel zusammen, um uns im folgenden Kapitel ganz dieser Frage zu widmen. Zuvor soll jedoch noch geklärt werden, inwieweit ein bestimmter Eckentyp ω_j mit $j = 4, 5, 6_a, 6_b, 7, 8, 9, 10, 12$ eine gewisse Anordnung von langen und flachen Pflastersteinen im Projektionsraum E erzwingt. Dies ist wichtig, denn im Allgemeinen lassen sich allein auf Grund der Kenntnis des Eckentyps ω_j folgende Fragen nicht zwingend eindeutig beantworten:

1. Welche Pflastersteine liegen an der Ecke ω_j an?
2. Wie liegen die Pflastersteine an der Ecke ω_j an?

Was ist damit gemeint? Betrachten wir dazu exemplarisch im Projektionsraum E eine Ecke des Typs ω_{6a} , realisiert von den Einheitsvektoren $+v_1$ und $+v_2$ sowie $+v_3$ und $+v_4$ sowie $+v_5$ und $-v_6$. Der gewählte Eckentyp hat in E die Gestalt einer *Blume*:²¹

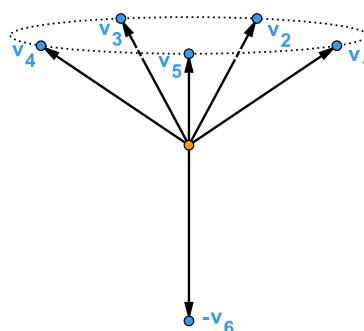


Abbildung 2.29.: Ecke des Typs ω_{6a} im Projektionsraum E

Die Ikosaederecken v_1, \dots, v_5 bilden in diesem Fall die *Blütenblätter* und die Ikosaederecke $-v_6$ den *Stiel* dieser Blume, siehe Abbildung 2.29. Wir wollen uns fragen: Welche Pflastersteine liegen zwischen den Blütenblättern an? Greifen wir für die Ikosaederecken v_1, \dots, v_6 , wie schon auf Seite 12, auf eine schematische Darstellung zurück, d. h. blicken wir gewissermaßen von oben auf die gewählte Eckenkonstellation und kennzeichnen die tatsächlich existierenden Ikosaederecken farbig, so ergibt sich die folgende Situation:

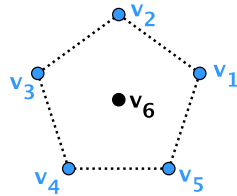


Abbildung 2.30.: Die Ikosaederecken $+v_1$ bis $+v_5$ existieren, $+v_6$ dagegen nicht.

Um zu klären, welche Pflastersteine hier anliegen können, müssen wir überlegen, welche der Kombinationsmöglichkeiten 1 bis 4, vgl. die schematische Darstellung der Pflastersteine in Abbildung 1.11, sich in obiger Abbildung realisieren lassen, denn der Aufspann dieser vier Kombinationsmöglichkeiten hat uns gerade zu den beiden Pflastersteinen im Fall des dreidimensionalen Penrose-Musters geführt!

Wir sehen: Kombination 3 findet sich in obiger Abbildung genau einmal wieder, allerdings gibt es genau fünf Möglichkeiten, diese zu realisieren:

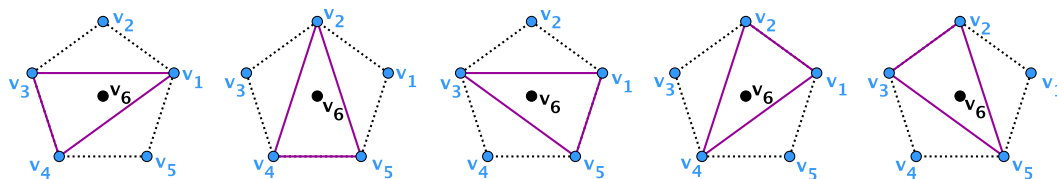


Abbildung 2.31.: Diese fünf Möglichkeiten gibt es, Kombination 3 zu realisieren.

Nach Festlegung von Kombination 3 existiert schließlich noch zweimal Kombination 2, siehe Abbildung 2.32, andere Möglichkeiten gibt es nicht! Da der Aufspann von Kom-

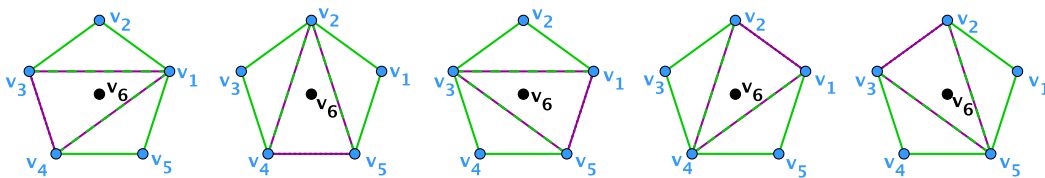
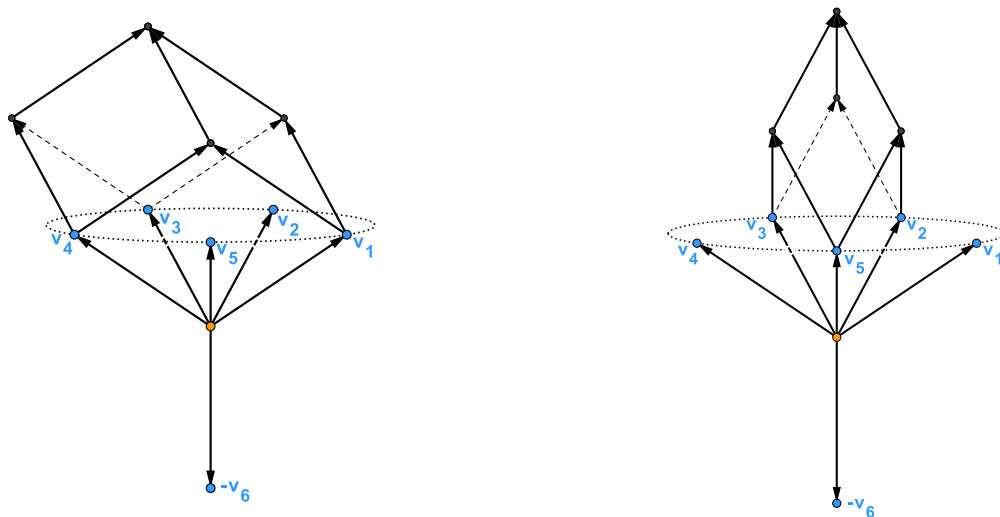


Abbildung 2.32.: Die Realisierung von Kombinationsmöglichkeit 3 legt Kombination 2 fest.

²¹Beachte: Wegen der unterschiedlichen Anordnung der Ikosaederecken $\pm v_i$ und $\pm w_i$ für $1 \leq i \leq 6$, vgl. die Beobachtungen 1.5 und 1.10, haben die Ecken im Projektionsraum E und im Hilfsraum F eine unterschiedliche Gestalt!

2. Das Fenster V

bination 3 ein langer Pflasterstein ist, der Aufspann von Kombinationsmöglichkeit 2 dagegen ein flacher Stein, vgl. Beobachtung 1.9, bedeutet das nichts anderes, als dass an dieser Stelle, d. h. zwischen den Blütenblättern einer Ecke des Typs ω_{6a} , ein langer und zwei flache Pflastersteine existieren. *Wie* die Steine jedoch anliegen ist offen. Hierfür gibt es gemäß Abbildung 2.31 genau fünf verschiedene Möglichkeiten. Perspektivisch gezeichnet gestaltet sich die Situation wie in Abbildung 2.33 dargestellt.



(a) Der lange Pflasterstein, aufgespannt von den benachbarten Einheitsvektoren $+v_3$ und $+v_4$ sowie dem übernächsten Nachbarn $+v_1$

(b) Der lange Pflasterstein, aufgespannt von den benachbarten Einheitsvektoren $+v_2$ und $+v_3$ sowie dem übernächsten Nachbarn $+v_5$

Abbildung 2.33.: Zwei von fünf Möglichkeiten, den langen Pflasterstein anzulegen

Insgesamt führen uns diese Überlegungen zu folgendem Ergebnis:

Beobachtung 2.22. *An einer Ecke des Typs ω_{6a} liegen insgesamt sechs lange und zwei flache Pflastersteine an.*

Beweis. Wir wissen bereits, dass innerhalb der Blütenblätter ein langer und zwei flache Pflastersteine existieren. Es bleibt daher nur noch zu klären, welche Steine zwischen dem Stiel der Blume und den einzelnen Blütenblättern anliegen, und hier hilft die folgende Überlegung weiter:

- Der Stiel und ein beliebiges Blütenblatt einer Ecke des Typs ω_{6a} sind stets übernächste Nachbarn im Ikosaeder.
- Zu jedem beliebigen Blütenblatt existieren immer zwei direkte Nachbarn: die beiden Blütenblätter links und rechts davon.

Diese Konstellation von Ikosaederecken lässt nun allein Kombination 3 zu – vgl. die Übersicht über die schematische Darstellung der Pflastersteine in Abbildung 1.11 – und

zwar insgesamt fünfmal, was bedeutet, dass noch fünf weitere lange Pflastersteine hinzukommen.²² \square

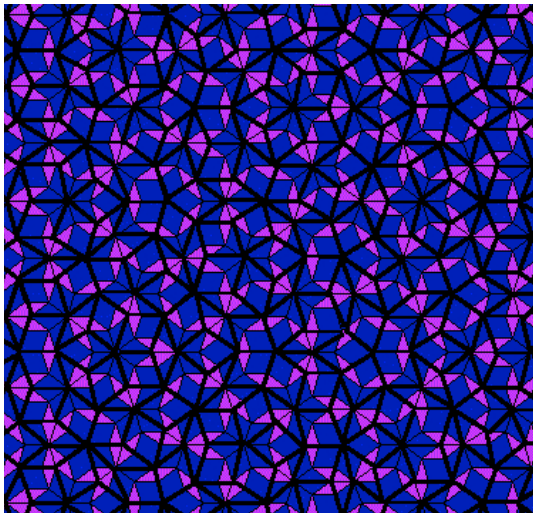
Im Fall der Ecke des Typs ω_{6a} wissen wir somit ganz genau, welche Pflastersteine existieren. Wie diese Pflastersteine anliegen, ist dagegen nur für die fünf langen Steine zwischen dem Stiel und den Blütenblättern völlig eindeutig.

Diese Art von Überlegung kann man nun theoretisch ebenso für jeden anderen Eckentyp ω_j mit $j = 4, 5, 6_b, 7, 8, 9, 10, 12$ im Projektionsraum E anstellen. In der Praxis ist jedoch schon allein die Information, dass es gewisse Wahlfreiheiten hinsichtlich der Anzahl und vor allem der Lage von langen und flachen Pflastersteinen an einer Ecke ω_j geben kann, entscheidend und muss stets bedacht werden. Dies wird in Kapitel 3 von Bedeutung sein.

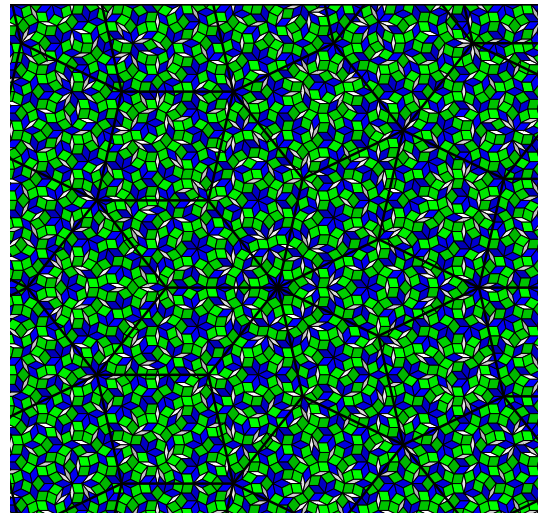
²²Im Fall von Abbildung 2.29 bedeutet das: Die Einheitsrichtung $-v_6$ spannt mit den folgenden fünf Paaren von benachbarten Ikosaederecken jeweils einen langen Pflasterstein auf: $(+v_1, +v_2)$ und $(+v_2, +v_3)$ sowie $(+v_3, +v_4)$ und $(+v_4, +v_5)$ sowie $(+v_5, +v_1)$.

3. Deflation im Fall von Penrose 3D

Mit dem bisherigen Wissen kann nun auch die Frage nach der Unterteilung der beiden Pflastersteine im Fall des dreidimensionalen Penrose-Musters beantwortet werden. Was ist damit gemeint? Aus Kapitel 1 ist bekannt, dass die Eigenschaft der Inflation/Deflation existiert, d.h. wir wissen bereits, *dass* die in 1.3.3 ermittelten Pflastersteine in kleinere formgleiche Pflastersteine unterteilt werden können, welche wiederum ein dreidimensionales Penrose-Muster bilden. Was jedoch noch nicht geklärt ist, ist die Frage, *wie* diese Unterteilung der Pflastersteine aussieht: Handelt es sich, wie im Fall des zweidimensionalen *Penrose-Musters*, um eine eindeutige Unterteilung, was bedeutet, dass die Pflastersteine auf immer die gleiche Art und Weise unterteilt werden, vgl. [D]? Oder ist die gesuchte Unterteilung alles andere als eindeutig, wie z. B. im sogenannten *Heprose-Fall*, vgl. [ER]?



(a) Eindeutigkeit der Unterteilung im Penrose-Fall



(b) Uneindeutigkeit der Unterteilung im Heprose-Fall²³

3.1. Der erste Deflationszug: Transformation der Ecken

Im Folgenden soll die Terminologie aus den Beispielüberlegungen im \mathbb{R}^2 , vgl. Abbildung 1.3, auf den Fall des dreidimensionalen Penrose-Musters übertragen werden: M_E bezeichnet demnach das dreidimensionale Penrose-Muster im Projektionsraum E , welches durch Projektion aller ganzzahligen Gitterpunkte $z \in (E + I^6) \subset \mathbb{R}^6$ auf E entsteht. Die beiden Muster $M_{E'}$ und SM_E liegen dagegen im Projektionsraum $E' = S(E)$

²³<http://www.math.uni-augsburg.de/~eschenbu/p7-2.pdf>, 11.05.2011

3. Deflation im Fall von Penrose 3D

und entstehen durch Projektion aller ganzzahligen Gitterpunkte $z \in (E' + I^6) \subset \mathbb{R}^6$ bzw. $z \in (E' + SI^6) \subset \mathbb{R}^6$ auf E' . Analog zu den Beobachtungen 1.1 und 1.2 im \mathbb{R}^2 ist das zu M_E ähnliche Muster SM_E eine echte Verfeinerung von $M_{E'}$ und wird daher auch Deflationsmuster von $M_{E'}$ genannt: Die Fliesen von $M_{E'}$ lassen sich in kleinere formgleiche Fliesen unterteilen, welche wiederum ein analoges Muster, nämlich SM_E , bilden.

Mit den Bezeichnungen *grobes Muster* für $M_{E'}$ und *feines Muster* für SM_E ist somit zu klären: Was ist der Zusammenhang zwischen dem groben Muster $M_{E'}$ und dem feinen Muster SM_E unter Deflation? Betrachten wir dazu einen beliebigen Gitterpunkt $z \in \mathbb{Z}^6 \subset \mathbb{R}^6$:

1. Gilt $z \in (E' + I^6) \subset \mathbb{R}^6$, so ist $z_{E'}$ Teil des groben Musters $M_{E'}$, und als solcher besitzt $z_{E'}$ bestimmte Nachbarpunkte $z_{E'} \pm v_i$ mit $1 \leq i \leq 6$, welche ebenfalls Teil des Musters $M_{E'}$ sind: Der Punkt $z_{E'}$ ist einer der bekannten Eckentypen ω_j mit $j = 4, 5, 6_a, 6_b, 7, 8, 9, 10, 12$, vgl. Kapitel 2.
2. Wegen $(E' + I^6) \subset (E' + SI^6)$ folgt mit $z \in (E' + I^6) \subset \mathbb{R}^6$ jedoch auch immer $z \in (E' + SI^6) \subset \mathbb{R}^6$, und das wiederum bedeutet nichts anderes, als dass $z_{E'}$ ebenso Teil des feinen Musters SM_E ist. Als solcher besitzt $z_{E'}$ nun aber eine andere Nachbarumgebung als innerhalb des Musters $M_{E'}$, und $z_{E'}$ ist somit ein anderer Eckentyp ω_l mit $l = 4, 5, 6_a, 6_b, 7, 8, 9, 10, 12$.

Die Frage, die folglich beantwortet werden muss, lautet:

Wenn $z_{E'}$ im groben Muster $M_{E'}$ Ecke des Typs ω_j ist, was für ein Eckentyp ω_l ist dann $z_{E'}$ als Teil des feinen Musters SM_E , wobei $j, l = 4, 5, 6_a, 6_b, 7, 8, 9, 10, 12$?

Ein wichtiges Hilfsmittel zur Klärung dieser Frage sind die Beobachtungen 1.1 und 1.2, aus denen sich ergibt:

Beobachtung 3.1. *Um den Zusammenhang des groben Musters $M_{E'}$ mit dem feinen Muster SM_E in E' zu verstehen, kann man den Zusammenhang des Musters $M_{E'}$ in E' mit dem Muster M_E in E untersuchen. Hierbei hilft die Deflationsabbildung $T := S^{-1}$.*

Beweis. Wie bereits erwähnt, gilt analog zu den Beispielüberlegungen im \mathbb{R}^2 , dass das Muster SM_E in E' ähnlich ist zum Muster M_E in E , vgl. Beobachtung 1.2. Aussagen über M_E sind somit gleichzeitig auch Aussagen über SM_E , denn eine Ähnlichkeitsabbildung ändert nichts an der grundsätzlichen Gestalt des Musters, also beispielsweise an den Eckentypen, sondern lediglich etwas an dessen Größe und Lage im Raum!²⁴

Die Deflation ist die Umkehrung der Inflation, und für diese wiederum ist im Fall des dreidimensionalen Penrose-Musters die ganzzahlig invertierbare, symmetrische Matrix S verantwortlich, vgl. 1.3.2. Folglich muss zur Untersuchung der Deflation gerade mit der Umkehrmatrix von S gearbeitet werden, vgl. Abbildung 1.3. \square

Mit Hilfe von Beobachtung 3.1 haben wir einen Weg gefunden, obige Frage zu beantworten: Wollen wir wissen, was mit den Ecken ω_j mit $j = 4, 5, 6_a, 6_b, 7, 8, 9, 10, 12$ des

²⁴Wollen wir dagegen Ergebnisse des Musters M_E , welche konkrete Größen betreffen, wie beispielsweise die Realisierung bestimmter Ecken durch die Einheitsvektoren $\pm v_i$ mit $1 \leq i \leq 6$, auf das Muster SM_E übertragen, so müssen wir sehr wohl noch die Ähnlichkeitsabbildung S anwenden!

groben Musters $M_{E'}$ unter Deflation passiert, müssen wir die Deflationsabbildung T auf das Fenster V anwenden, denn mit dessen Hilfe haben wir gerade die unterschiedlichen Eckentypen $\omega_4, \dots, \omega_{12}$ im Fall des dreidimensionalen Penrose-Musters erhalten! Wegen $V \subset F$ muss zunächst geklärt werden, wie die Abbildung T im Hilfsraum F wirkt:

Beobachtung 3.2. *Die Deflationsabbildung T dreht (im Sinne einer Punktspiegelung am Ursprung) und streckt in Richtung des Projektionsraums E bzw. E' um den Faktor Φ^3 . In Richtung des Hilfsraums F wirkt T als eine Stauchung um den Faktor φ^3 .*

Beweis. Nach Konstruktion sind die Projektionsräume E und E' sowie der Hilfsraum F (verschobene) Eigenräume der Inflationsabbildung S , und S besitzt in Richtung E und E' den Eigenwert $-\varphi^3$ sowie in F den Eigenwert Φ^3 . Die Deflationsabbildung T als Umkehrabbildung von S besitzt daher in Richtung E und E' den inversen Eigenwert $(-\varphi^3)^{-1} = -\Phi^3$ sowie in F den inversen Eigenwert $(\Phi^3)^{-1} = \varphi^3$. \square

Mit diesem Wissen folgt:

Beobachtung 3.3. *Die Ecken ω_j mit $j = 4, 5, 6_a, 6_b, 7, 8, 9, 10, 12$ des groben Musters $M_{E'}$ werden unter Deflation allesamt zu Ecken des Typs ω_{12} im feinen Muster SM_E .*

Beweis. Wegen $V \subset F$ folgt mit Beobachtung 3.2 sofort, dass das Fenster V unter T um den Faktor φ^3 gestaucht wird. Damit wissen wir, was mit den Ecken ω_j mit $j = 4, 5, 6_a, 6_b, 7, 8, 9, 10, 12$ des groben Musters $M_{E'}$ unter T geschieht:

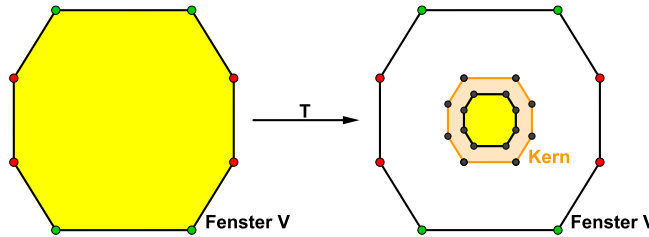


Abbildung 3.1.: Das Fenster V unter der Deflationsabbildung T

Wegen $T(V) = \varphi^3 V \subset \varphi^2 V = \text{Kern von } V$, vgl. Beobachtung 2.6, wird das Fenster V unter T auf einen Bereich innerhalb des Kerns von V gestaucht und somit werden alle Ecken ω_j mit $j = 4, 5, 6_a, 6_b, 7, 8, 9, 10, 12$ des groben Musters $M_{E'}$ unter T in Ecken des Typs ω_{12} des Musters M_E transformiert. Da sich Eckentypen jedoch unter Ähnlichkeitsabbildungen nicht ändern, gilt die entsprechende Aussage gemäß Beobachtung 3.1 ebenso für das zu M_E ähnliche Muster SM_E . \square

Dies bedeutet nun aber auch: Wenn alle *alten Ecken* im feinen Muster SM_E , d. h. alle Ecken, welche auch schon als einer der bekannten Eckentypen $\omega_4, \dots, \omega_{12}$ im groben Muster $M_{E'}$ vorhanden sind, Ecken des Typs ω_{12} sind, dann sind umgekehrt alle Ecken des Typs ω_j mit $j = 4, 5, 6_a, 6_b, 7, 8, 9, 10$ im feinen Muster SM_E stets *neue Ecken*, also Ecken, welche im groben Muster $M_{E'}$ gerade nicht existieren, sondern unter Deflation neu hinzukommen.

3. Deflation im Fall von Penrose 3D

Doch gilt auch die Umkehrung dieser Aussage, sind alle neu hinzukommenden Punkte im feinen Muster SM_E immer Ecken des Typs $\omega_4, \dots, \omega_{10}$?

Beobachtung 3.4. *Die Ecken des Typs ω_j mit $j = 4, 5, 6_a, 6_b, 7, 8, 9, 10$ im feinen Muster SM_E sind immer neu hinzukommende Ecken. Die Umkehrung ist jedoch falsch: Nicht jede neue Ecke im feinen Muster SM_E ist eine Ecke dieses Typs, auch Ecken des Typs ω_{12} in SM_E können neu hinzukommende Ecken sein!*

Beweis. Die Frage, ob alle neuen Ecken im feinen Muster SM_E immer Ecken des Typs ω_j mit $j = 4, 5, 6_a, 6_b, 7, 8, 9, 10$ sind, ist äquivalent zu der Frage, ob alle Ecken des Typs ω_{12} in SM_E stets alte Ecken sind. Nach den bisherigen Überlegungen ist dies jedoch nichts anderes, als die Frage nach dem Urbild der Ecken ω_{12} des Musters M_E unter T : Besitzen alle Ecken ω_{12} in M_E stets ein Urbild unter T ? Letzteres kann mit Hilfe von Abbildung 3.1 beantwortet werden: Die Ecken des Typs ω_{12} liegen bekanntlich im Kern des Fensters V und für dessen Urbild gilt wegen $V \subset F$:

$$T^{-1}(\text{Kern von } V) = \Phi^3(\text{Kern von } V) = \Phi^3(\varphi^2 V) = \Phi V \not\subset V.$$

Folglich besitzen nicht alle Ecken ω_{12} des Musters M_E unter T ein Urbild in V , und daher sind nicht alle Ecken des Typs ω_{12} im feinen Muster SM_E automatisch auch immer alte Ecken, also Ecken im groben Muster $M_{E'}$. \square

An dieser Stelle ist es nun hilfreich, sich die bisherigen Ergebnisse einmal zu verdeutlichen: Die Aussage, dass alle Ecken des groben Musters $M_{E'}$ unter Deflation in Ecken des Typs ω_{12} im feinen Muster SM_E transformiert werden, gilt für jeden beliebigen Pflasterstein in $M_{E'}$, denn bis dato sind noch keinerlei Einschränkungen getroffen worden, ob es sich um die Unterteilung eines langen oder flachen Pflastersteins handelt, geschweige denn, welche der Einheitsvektoren $\pm v_i$ mit $1 \leq i \leq 6$ den gewählten Pflasterstein realisieren! Wir erhalten somit in diesem ersten Deflationszug ein *global eindeutiges Ergebnis*, d. h. ein Ergebnis, welches sowohl global gültig, also unabhängig von der Wahl eines bestimmten Pflastersteins, als auch eindeutig ist, denn es geschieht mit allen alten Ecken des groben Musters $M_{E'}$ das Gleiche!

Was darüber hinaus ebenfalls bekannt ist, ist der Deflationsfaktor, also jener Faktor, um den die Pflastersteine von $M_{E'}$ unter Deflation verkleinert werden:

Beobachtung 3.5. *Die Pflastersteine des feinen Musters SM_E sind um den Faktor φ^3 kleiner als die Pflastersteine des groben Musters $M_{E'}$.*

Beweis. Dies folgt sofort aus der Wahl des Projektionsraums E als verschobener Eigenraum der Inflationsabbildung S , denn S staucht in Richtung E um den Faktor φ^3 . \square

Bemerkung. Nach Konstruktion werden im groben Muster $M_{E'}$ die Pflastersteine von den Einheitsvektoren $\pm v_1, \dots, \pm v_6$ mit der Kantenlänge $|\pm v_i|$ für alle $1 \leq i \leq 6$ aufgespannt.²⁵ Mit Beobachtung 3.5 folgt, dass im feinen Muster SM_E gerade die gestaucht-

²⁵Mit der Festlegung, dass die Vektoren e_1, \dots, e_6 des Ausgangsraums W eine ONB-Basis bilden, folgt $|\pm v_i| = \frac{1}{\sqrt{2}}$, vgl. 1.3.3. Diese explizite Länge spielt jedoch für die folgenden Überlegungen keine Rolle. Entscheidend ist allein das Verhältnis der Kanten der beiden Pflastersteine: Die Steine des feinen Musters SM_E sind um den Faktor φ^3 kleiner als die Pflastersteine des groben Musters $M_{E'}$!

ten Einheitsrichtungen $\pm\varphi^3v_1, \dots, \pm\varphi^3v_6$ die Pflastersteine bilden, und für deren Kantenlänge gilt $|\pm\varphi^3v_i| = \varphi^3|\pm v_i|$ für alle $1 \leq i \leq 6$. Bezüglich des feinen Musters SM_E bezeichnen wir daher $\pm\varphi^3v_1, \dots, \pm\varphi^3v_6$ als *Einheitsrichtungen*!

Insgesamt ergibt sich somit nach dem ersten Deflationszug für einen beliebigen flachen bzw. langen Pflasterstein des groben Musters $M_{E'}$ folgende Situation:

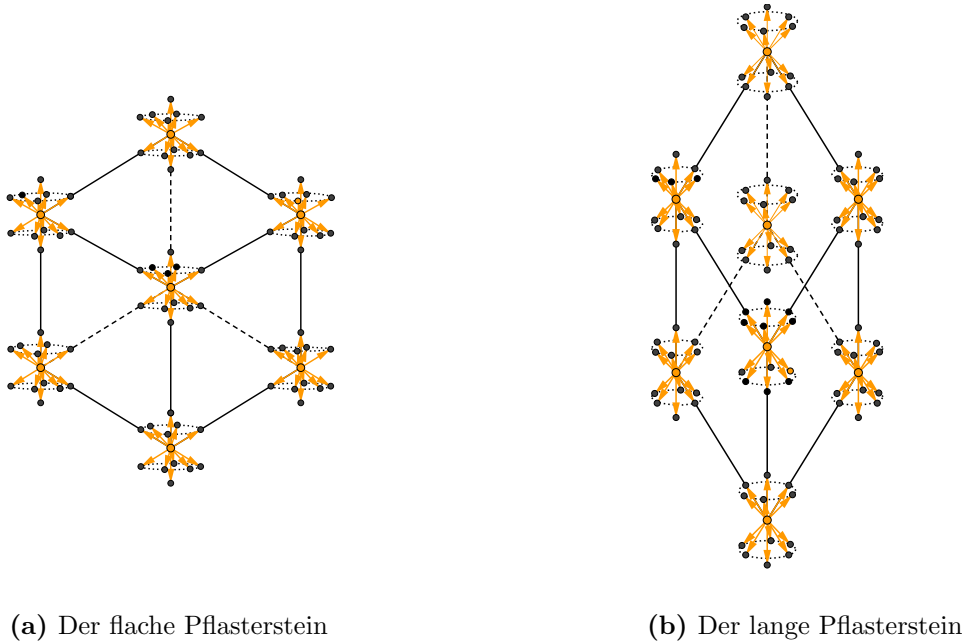


Abbildung 3.2.: Die Transformation der Ecken des groben Musters $M_{E'}$ in Ecken des Typs ω_{12} des feinen Musters SM_E

Wie aber geht es weiter im feinen Muster SM_E ? Um die Frage nach einer möglichen eindeutigen Unterteilung der beiden Pflastersteine im Fall des dreidimensionalen Penrose-Musters beantworten zu können, ist es – wie wir in obiger Abbildung sehen – nicht ausreichend, allein die Transformation aller alten Ecken $z_{E'}$ des groben Musters $M_{E'}$ in Ecken des Typs ω_{12} im feinen Muster SM_E zu kennen. In einem nächsten Schritt muss deshalb gefragt werden: Wie sehen die Nachbarnpunkte dieser alten Ecken $z_{E'}$ im feinen Muster SM_E aus?

3.2. Der zweite Deflationszug: Die Blumen

Bezeichnet $z_{E'}$ eine sogenannte alte Ecke im feinen Muster SM_E , so darf man nach den Ergebnissen aus 3.1, bildlich gesprochen, von $z_{E'}$ aus in jede der Einheitsrichtungen $\pm\varphi^3v_1, \dots, \pm\varphi^3v_6$ laufen. Demnach ist zu klären:

Welcher Eckentyp ω_j mit $j = 4, 5, 6_a, 6_b, 7, 8, 9, 10, 12$ ist der Nachbarnpunkt $z_{E'} \pm \varphi^3v_i$ des Punktes $z_{E'}$ für alle $1 \leq i \leq 6$ im feinen Muster SM_E ?

3. Deflation im Fall von Penrose 3D

Auch diese Frage kann wieder mit Hilfe des zu SM_E ähnlichen Musters M_E beantwortet werden, vgl. Beobachtung 3.1. Wir wissen bereits: Alle Ecken $z_{E'}$ des groben Musters $M_{E'}$ werden unter der Deflationsabbildung T in Ecken z_E des Typs ω_{12} des Musters M_E transformiert. Für den zu z_E gehörigen Projektionspunkt z_F im Hilfsraum F gilt dabei insbesondere $z_F \in \varphi^3 V$, vgl. Beobachtung 3.3. Weil T im Projektionsraum E um den Faktor Φ^3 streckt und im Sinne einer Punktspiegelung am Ursprung dreht, vgl. Beobachtung 3.2, ist obige Fragestellung äquivalent zu der Frage:

Welcher Eckentyp ω_j mit $j = 4, 5, 6_a, 6_b, 7, 8, 9, 10, 12$ ist der Nachbarpunkt $z_E \mp v_i$ des Punktes z_E mit $z_F \in \varphi^3 V$ für alle $1 \leq i \leq 6$ in dem zu SM_E ähnlichen Muster M_E ?

Damit steht fest, was im Weiteren zu tun ist. Wir müssen mit $j = 4, 5, 6_a, 6_b, 7, 8, 9, 10, 12$ klären, in welchen Gebieten Ω_j des Fensters V für alle $1 \leq i \leq 6$ die den Nachbarpunkten $z_E \mp v_i$ im Projektionsraum E entsprechenden Punkte $z_F \mp w_i$ liegen. Weil für obige Frage nur genau diejenigen z_E im Muster M_E von Interesse sind, für deren Projektionspunkt z_F im Hilfsraum F gilt $z_F \in \varphi^3 V$, müssen wir dazu das um den Faktor φ^3 verkleinerte Fenster V in alle Einheitsrichtungen $\mp w_1, \dots, \mp w_6$ verschieben und anschließend prüfen, welche der Fenstergebiete $\Omega_4, \dots, \Omega_{12}$ in V von diesen Verschiebungen überlagert werden.

Auf diese Weise erhält man für alle Punkte z_E im Muster M_E mit $z_F \in \varphi^3 V$ die Eckentypen der Nachbarpunkte $z_E \mp v_i$ mit $1 \leq i \leq 6$ und damit auch die Eckentypen der Nachbarpunkte $z_{E'} \pm \varphi^3 v_i$ der alten Punkte $z_{E'}$ in dem zu M_E ähnlichen Muster SM_E . Allerdings ist nun Vorsicht geboten: Fragen wir nicht nur nach den Eckentypen der Nachbarecken, sondern auch, welche der Einheitsrichtungen $\pm v_1, \dots, \pm v_6$ diese Eckentypen im Muster M_E konkret realisieren, so müssen wir, um das Ergebnis auch auf das Muster SM_E übertragen zu können, noch die Ähnlichkeitsabbildung S auf eben diese Einheitsrichtungen $\pm v_1, \dots, \pm v_6$ anwenden, vgl. Fußnote 24. Dabei gilt für die Abbildung S nach 1.3.2:

$$(3.1) \quad S: \pm v_i \mapsto \mp \varphi^3 v_i \quad \text{für alle } 1 \leq i \leq 6.$$

Doch auch hier stehen wir wieder vor dem schon aus Kapitel 2 bekannten Problem: Wie kann man diese dreidimensional sehr anschauliche Idee zweidimensional fassen und damit mit den bereits vorhandenen Mitteln graphisch lösen?

Beobachtung 3.6. *Die Nachbarpunkte $z_{E'} \pm \varphi^3 v_i$ der sogenannten alten Ecken $z_{E'}$ im feinen Muster SM_E sind für alle $1 \leq i \leq 6$ Ecken des Typs ω_{6a} .*

Beweis. Nach den obigen Überlegungen ist zu klären: Wo in V liegen die Verschiebungen des verkleinerten Fensters $\varphi^3 V$ in Richtung der Einheitsrichtungen $\pm w_1, \dots, \pm w_6$? Das um den Faktor φ^3 verkleinerte Fenster V hat ebenfalls die Gestalt eines Rhombentriakontaeders und wird entsprechend von insgesamt 30 um den Faktor φ^3 verkleinerten Fensterrauten, genannt R' , begrenzt. Die Verschiebung von $\varphi^3 V$ in alle möglichen Einheitsrichtungen $\pm w_1, \dots, \pm w_6$ ist somit äquivalent zu der Verschiebung dieser 30 Rauten R' in alle möglichen Einheitsrichtungen $\pm w_1, \dots, \pm w_6$. Wegen des Prinzips der Analogiebetrachtung A.6 genügt es jedoch wieder, nur die Verschiebung einer einzigen

verkleinerten Fensterraute R' in alle möglichen Einheitsrichtungen $\pm w_i$ für $1 \leq i \leq 6$ zu betrachten und diese Ergebnisse dann durch Analogien auf alle übrigen 29 Fälle zu übertragen, vgl. den Beweis zu Beobachtung 2.10.

Das Vorgehen gliedert sich somit in die folgenden Schritte, die alle – auch wenn es auf den ersten Blick nicht so scheint – mit Hilfe der Überlegungen und Ergebnisse aus Kapitel 2 graphisch gelöst werden können:

1. Festlegung auf eine der 30 Fensterrauten R' von $\varphi^3 V$
2. Verschiebung der gewählten Fensterraute R' in alle möglichen Einheitsrichtungen $\pm w_1, \dots, \pm w_6$
3. Überprüfung, welche Gebiete $\Omega_4, \dots, \Omega_{12}$ im Fenster V von den in Teilschritt 2 angesprochenen Verschiebungen überlagert werden
4. Übertragung der Ergebnisse auf alle restlichen 29 Fensterrauten R' mit Hilfe des Analogieprinzips A.6

Teilschritt 1:

In Analogie zum bisherigen Vorgehen wählen wir als Fensterraute R' des verkleinerten Fensters $\varphi^3 V$ genau die Raute aus, welche parallel zu der Fensterraute $R_{(5,-6)}$ ist. Diese soll entsprechend mit $R'_{(5,-6)}$ bezeichnet werden.

Bemerkung. Entsprechend der Benennung der 30 Fensterrauten $R_{(\pm m, \pm n)}$ bezeichnen wir die 30 Fensterrauten des um den Faktor φ^3 verkleinerten Fensters V mit $R'_{(\pm m, \pm n)}$, wobei $m, n \in \{1, \dots, 6\}$ und $m < n$, vgl. 1.19.

Teilschritt 2:

Mit Hilfe der Zerlegung aller Einheitsvektoren $\pm w_1, \dots, \pm w_6$ in ihre jeweilige Lateral- und Höhenkomponente, vgl. A.3, kann die Verschiebung der gewählten Raute $R'_{(5,-6)}$ in alle Einheitsrichtungen konstruiert werden. Dabei spielen $\pm w_1$ und $\pm w_4$ wieder eine gewisse Sonderrolle, denn diese beiden Paare von Einheitsvektoren liegen ganz in der Zeichenebene parallel zu Raute $R'_{(5,-6)}$, vgl. Beobachtung A.5.

Für die übrigen Einheitsvektoren $\pm w_2$ und $\pm w_3$ sowie $\pm w_5$ und $\pm w_6$ gilt dagegen das folgende Vorgehen: In einem ersten Schritt muss durch Abtragen der jeweiligen Höhenkomponente ermittelt werden, auf welchen Ebenen die Verschiebungen der gewählten Raute $R'_{(5,-6)}$ in die genannten Einheitsrichtungen liegen. Verschiebt man anschließend die Raute auf diesen Ebenen noch um die jeweilige Lateralkomponente der entsprechenden Einheitsrichtung, so kann man in einem zweiten Schritt auch die genaue Lage der verschobenen Raute $R'_{(5,-6)}$ ermitteln.²⁶

²⁶Vgl. das Vorgehen im Beweis zu Beobachtung 2.10: Dort wurde durch Abtragen der Höhenkomponente ermittelt, auf welchen Ebenen die Verschiebungen der Fensterraute $R_{(5,-6)}$ in alle Einheitsrichtungen $\pm w_1, \dots, \pm w_6$ liegen. In diesem Fall interessiert mehr: Wir benötigen nicht nur die Ebenen, auf denen die Verschiebungen der verkleinerten Fensterraute $R'_{(5,-6)}$ in alle Einheitsrichtungen $\pm w_1, \dots, \pm w_6$ liegen, sondern auch die konkrete Lage der verschobenen Raute auf diesen Ebenen. Diese erhalten wir gerade durch Berücksichtigung der entsprechenden Lateralkomponenten.

3. Deflation im Fall von Penrose 3D

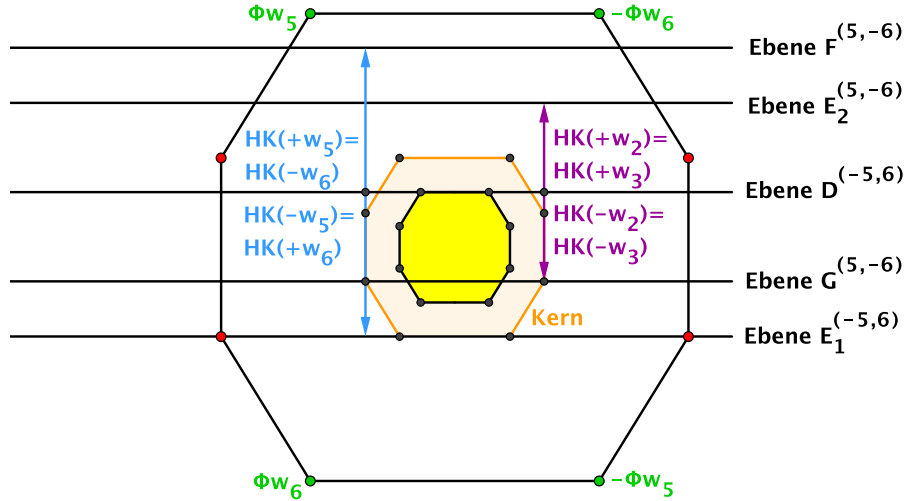


Abbildung 3.3.: Die Verschiebung der Raute $R'_{(5,-6)}$ in alle Einheitsrichtungen

Die Verschiebung der Raute $R'_{(5,-6)}$ um

- die Einheitsrichtungen $\pm w_1$ und $\pm w_4$ liegt auf der Ebene durch die Raute $R'_{(5,-6)}$ selbst, welche identisch ist mit der Ebene $D^{(-5,6)}$ aus Abbildung 2.23.
- die Einheitsrichtungen $+w_2$ und $+w_3$ liegt auf der Ebene $E_2^{(5,-6)}$.
- die Einheitsrichtungen $-w_2$ und $-w_3$ liegt auf der Ebene $G^{(5,-6)}$.
- die Einheitsrichtungen $-w_5$ und $+w_6$ liegt auf der Ebene $E_1^{(-5,6)}$, beachte hierzu insbesondere die Bemerkung auf Seite 59.
- die Einheitsrichtungen $+w_5$ und $-w_6$ liegt auf der Ebene $F^{(5,-6)}$.

Bemerkung. Wir treffen somit an dieser Stelle auf zwei weitere Ebenentypen: Die Ebene vom Typ \mathcal{F} sowie die Ebene des Typs \mathcal{G} . Die in Abbildung 3.3 eingezeichneten Ebenen $F^{(5,-6)}$ und $G^{(5,-6)}$ sind wieder ganz konkrete Realisierungen dieser Ebenentypen, vgl. die Bemerkung auf Seite 40.

Die Verschiebung in Richtung $\pm w_1$ und $\pm w_4$:

Um die Verschiebung der Raute $R'_{(5,-6)}$ in Richtung der ganz in der Zeichenebene liegenden Einheitsvektoren $\pm w_1$ und $\pm w_4$ zu bestimmen, müssen wir nach den obigen Bemerkungen den Fensterschnitt \mathcal{D} wählen und innerhalb dieses Schnitts die Raute $R'_{(5,-6)}$ nach $\pm w_1$ und $\pm w_4$ verschieben, siehe Abbildung 3.4.

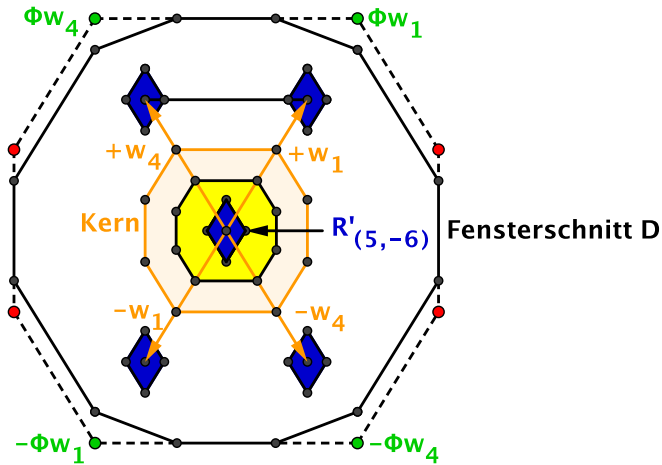


Abbildung 3.4.: Die Verschiebung von $R'_{(5,-6)}$ nach $\pm w_1$ und $\pm w_4$ liegt auf der Ebene $D^{(-5,6)}$.

Die Verschiebung in die übrigen Einheitsrichtungen:

Die Verschiebung der Raute $R'_{(5,-6)}$ in die übrigen Einheitsrichtungen $\pm w_2$ und $\pm w_3$ sowie $\pm w_5$ und $\pm w_6$ soll im Folgenden exemplarisch anhand der Konstruktion für den Fall $+w_2$ und $+w_3$ gezeigt werden:

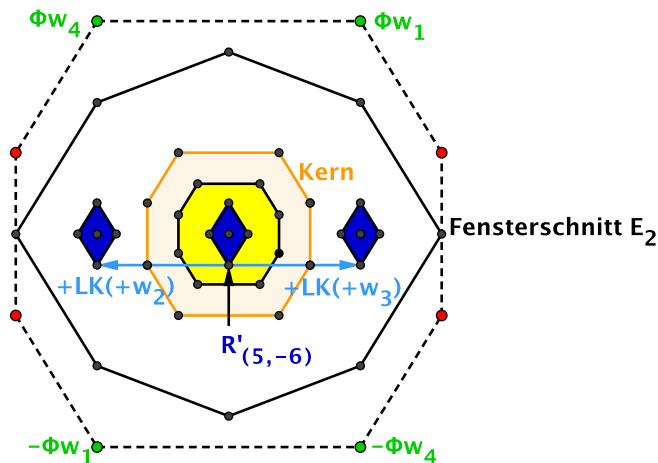


Abbildung 3.5.: Die Verschiebung von $R'_{(5,-6)}$ nach $+w_2$ und $+w_3$ liegt auf der Ebene $E_2^{(5,-6)}$.

Konstruktion der Verschiebung nach $+w_2$ und $+w_3$:

1. Abtragen der Höhenkomponente von $+w_2$ und $+w_3$ ergibt nach Abbildung 3.3: Die Verschiebung von $R'_{(5,-6)}$ in Richtung $+w_2$ und $+w_3$ liegt auf der Ebene $E_2^{(5,-6)}$.
2. Verschiebe folglich die Raute $R'_{(5,-6)}$ auf dem Schnitt der Ebene $E_2^{(5,-6)}$ mit V , d. h. auf dem Fensterschnitt \mathcal{E}_2 , um die Lateralkomponente von $+w_2$ bzw. $+w_3$.

Die Konstruktion aller übrigen Verschiebungen der Raute $R'_{(5,-6)}$ geschieht völlig analog zu diesem Vorgehen, siehe dazu die Konstruktionen in den Abbildungen 3.6 und 3.7.

3. Deflation im Fall von Penrose 3D

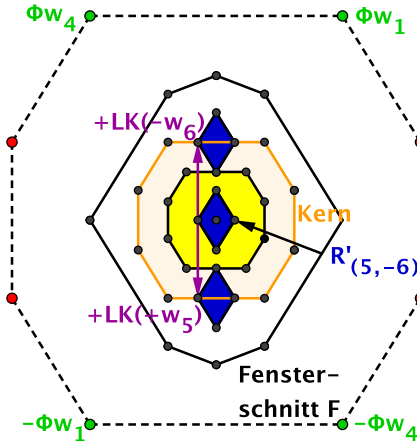
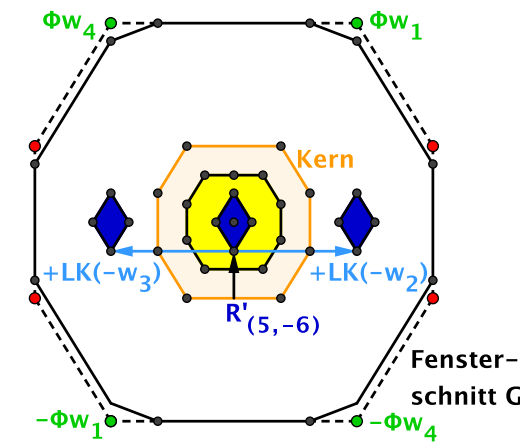
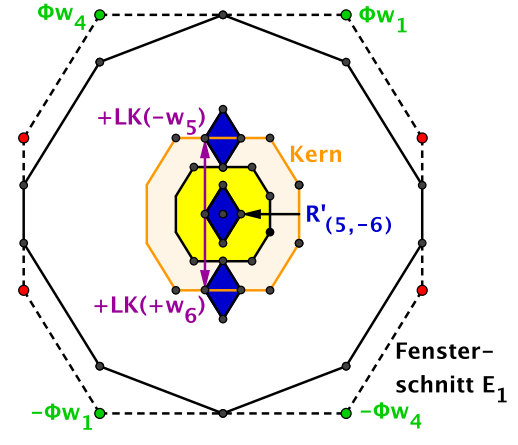


Abbildung 3.6.: Die Verschiebung von $R'_{(5,-6)}$ nach $+w_5$ und $-w_6$ liegt auf der Ebene $F^{(5,-6)}$.



(a) Die Verschiebung von $R'_{(5,-6)}$ nach $-w_2$ und $-w_3$ liegt auf der Ebene $G^{(5,-6)}$.



(b) Die Verschiebung von $R'_{(5,-6)}$ nach $-w_5$ und $+w_6$ liegt auf der Ebene $E_1^{(-5,6)}$.

Abbildung 3.7.: Die Verschiebung von $R'_{(5,-6)}$ nach $-w_2$ und $-w_3$ sowie $-w_5$ und $+w_6$

Teilschritt 3:

Mit Teilschritt 2 ist die genaue Lage der um die Einheitsrichtungen $\pm w_1, \dots, \pm w_6$ verschobenen Raute $R'_{(5,-6)}$ bekannt. Mit diesem Wissen kann nun bestimmt werden, in welchen dreidimensionalen Gebieten $\Omega_4, \dots, \Omega_{12}$ von V diese Verschiebungen liegen: Wir müssen dazu einfach die Gebietseinteilung auf den in Abbildung 3.3 ermittelten Ebenen bestimmen und prüfen, welche der Gebiete $\Omega'_4, \dots, \Omega'_{12}$ auf den entsprechenden Ebenen von der verschobenen Raute $R'_{(5,-6)}$, wie in den Abbildungen 3.4 bis 3.7 dargestellt, jeweils überlagert werden. Unter Berücksichtigung der Tatsache, dass das Fenster V offen ist und folglich auch $\varphi^3 V$, ergibt sich damit die folgende Situation:

- Für die Ebene $E_{2-}^{(5,-6)}$ wurde die Gebietseinteilung bereits in Kapitel 2 bestimmt.

- Für die Ebene $E_{1+}^{(-5,6)}$ ist die Gebietseinteilung ebenfalls bekannt, denn wir kennen die Gebietseinteilung der Ebene $E_{1+}^{(5,-6)}$.
- Die Gebietseinteilung der restlichen Ebenen kann ganz analog zu den Gebietseinteilungen der Ebenen $E_{1\pm}^{(5,-6)}$ und $E_{2\pm}^{(5,-6)}$ konstruiert werden, siehe A.4.

Wir erhalten somit:

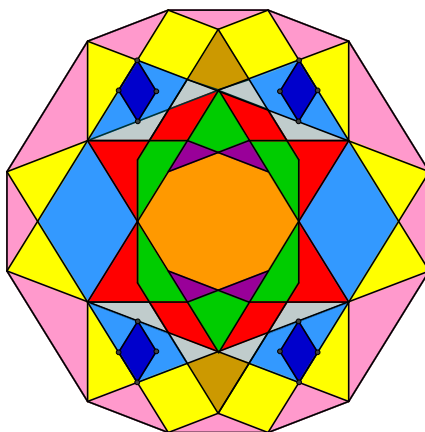
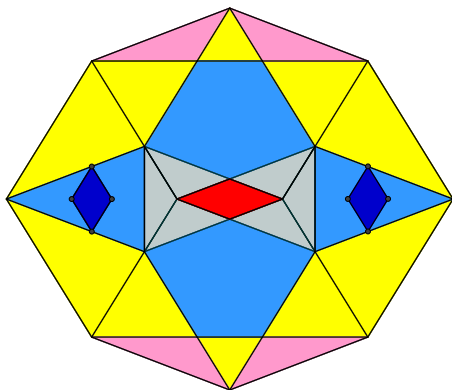
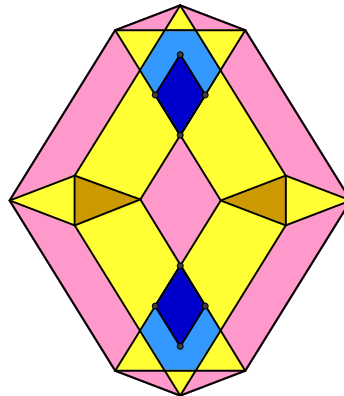


Abbildung 3.8.: Die um $\pm w_1$ und $\pm w_4$ verschobene Raute $R'_{(5,-6)}$ überlagert auf der Ebene $D^{(-5,6)}$ jeweils ein Gebiet des Typs Ω'_{6a} .



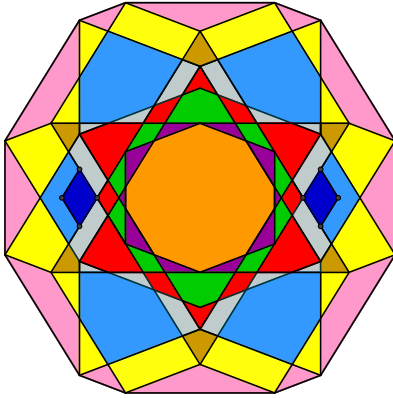
(a) Die um $+w_2$ und $+w_3$ verschobene Raute überlagert auf der Ebene $E_{2-}^{(5,-6)}$ jeweils ein Gebiet des Typs Ω'_{6a} .



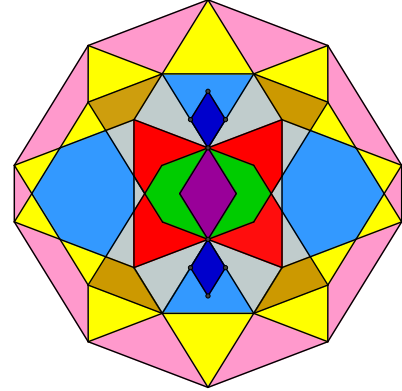
(b) Die um $+w_5$ und $-w_6$ verschobene Raute überlagert auf der Ebene $F^{(5,-6)}$ jeweils ein Gebiet des Typs Ω'_{6a} .

Abbildung 3.9.: Diese Gebiete werden bei der Verschiebung der Raute $R'_{(5,-6)}$ in Richtung $+w_2$ und $+w_3$ sowie $+w_5$ und $-w_6$ überlagert.

3. Deflation im Fall von Penrose 3D



(a) Die um $-w_2$ und $-w_3$ verschobene Raute überlagert auf der Ebene $G^{(5,-6)}$ jeweils ein Gebiet des Typs Ω'_{6a} .



(b) Die um $-w_5$ und $+w_6$ verschobene Raute überlagert auf der Ebene $E_{1+}^{(-5,6)}$ jeweils ein Gebiet des Typs Ω'_{6a} .

Abbildung 3.10.: Diese Gebiete werden bei der Verschiebung der Raute $R'_{(5,-6)}$ in Richtung $-w_2$ und $-w_3$ sowie $-w_5$ und $+w_6$ überlagert.

Die Abbildungen 3.8 bis 3.10 zeigen: Die Verschiebungen der Raute $R'_{(5,-6)}$ in alle möglichen Einheitsrichtungen $\pm w_1, \dots, \pm w_6$ liegen allesamt in einem Gebiet des Typs Ω'_{6a} . Doch wie ist dieses Ergebnis zu bewerten? Dazu müssen wir uns ansehen, welche der Einheitsrichtungen $\pm w_1, \dots, \pm w_6$ jeweils ganz konkret in den von der verschobenen Raute $R'_{(5,-6)}$ überlagerten Gebieten Ω'_{6a} erlaubt sind.

Hilfsbeobachtung 2. Die Verschiebung von $R'_{(5,-6)}$ in alle möglichen Einheitsrichtungen $\pm w_1, \dots, \pm w_6$ liegt jeweils in einem anderen dreidimensionalen Gebiet des Typs Ω_{6a} .

Beweis. In A.4 finden sich ganz allgemein die Gebietseinteilungen aller Ebenentypen, für die Ebenen parallel zu Raute $R_{(5,-6)}$ sind darüber hinaus die in den einzelnen Gebieten jeweils konkret erlaubten Einheitsrichtungen $\pm w_1, \dots, \pm w_6$ aufgeführt.

- Für die Ebenen $E_{2-}^{(5,-6)}$ und $F^{(5,-6)}$ sowie $G^{(5,-6)}$ kann man dieser Aufstellung unmittelbar entnehmen, welche Einheitsrichtungen $\pm w_i$ mit $1 \leq i \leq 6$ in den von der verschobenen Raute $R'_{(5,-6)}$ überlagerten Gebieten Ω'_{6a} erlaubt sind.
- Für die Ebenen $D^{(-5,6)}$ und $E_{1+}^{(-5,6)}$ muss mit Hilfe von Analogiebetrachtungen, siehe 2.2.2, ermittelt werden, welche Einheitsrichtungen $\pm w_i$ mit $1 \leq i \leq 6$ in den von der verschobenen Raute $R'_{(5,-6)}$ überlagerten Gebieten Ω'_{6a} erlaubt sind.

Insgesamt ergeben sich die unterschiedlichen Konstellationen von erlaubten Einheitsrichtungen wie in Tabelle 3.1 aufgelistet.

Dieser Tabelle ist zu entnehmen, dass ein jedes der von der Raute $R'_{(5,-6)}$ überlagerten Gebiete Ω'_{6a} jeweils eine andere Konstellation von Einheitsrichtungen zulässt. Da die Gebiete Ω'_{6a} nach Konstruktion die Einschränkungen der dreidimensionalen Fenstergebiete

Verschiebung $R'_{(5,-6)}$	Erlaubte Einheitsrichtungen
in Richtung $+w_1$	$-w_1, +w_2, -w_3, -w_4, +w_5, +w_6$
in Richtung $-w_1$	$+w_1, -w_2, +w_3, +w_4, -w_5, -w_6$
in Richtung $+w_2$	$+w_1, -w_2, +w_3, -w_4, -w_5, +w_6$
in Richtung $-w_2$	$-w_1, +w_2, -w_3, +w_4, +w_5, -w_6$
in Richtung $+w_3$	$-w_1, +w_2, -w_3, +w_4, -w_5, +w_6$
in Richtung $-w_3$	$+w_1, -w_2, +w_3, -w_4, +w_5, -w_6$
in Richtung $+w_4$	$-w_1, -w_2, +w_3, -w_4, +w_5, +w_6$
in Richtung $-w_4$	$+w_1, +w_2, -w_3, +w_4, -w_5, -w_6$
in Richtung $+w_5$	$+w_1, -w_2, -w_3, +w_4, -w_5, +w_6$
in Richtung $-w_5$	$-w_1, +w_2, +w_3, -w_4, +w_5, -w_6$
in Richtung $+w_6$	$+w_1, +w_2, +w_3, +w_4, +w_5, -w_6$
in Richtung $-w_6$	$-w_1, -w_2, -w_3, -w_4, -w_5, +w_6$

Tabelle 3.1.: Die in den unterschiedlichen Gebieten Ω_{6a} erlaubten Einheitsrichtungen $\pm w_i$ mit $1 \leq i \leq 6$

Ω_{6a} auf die Ebenen $D^{(-5,6)}$ und $E_{2-}^{(5,-6)}$ sowie $F^{(5,-6)}$ und $G^{(5,-6)}$ sowie $E_{1+}^{(-5,6)}$ sind, liegt die Verschiebung der Raute $R'_{(5,-6)}$ in alle Einheitsrichtungen $\pm w_1, \dots, \pm w_6$ jeweils in einem anderen dreidimensionalen Gebiet des Typs Ω_{6a} des Fensters V . \square

Teilschritt 4:

Mit Hilfsbeobachtung 2 weiß man: Es gibt mindestens zwölf verschiedene Gebiete des Typs Ω_{6a} im Fenster V . Gibt es darüber hinaus aber überhaupt noch weitere Gebiete dieses Typs in V ?

Hilfsbeobachtung 3. *Es gibt genau zwölf Gebiete des Typs Ω_{6a} im Fenster V .*

Beweis. Nach Hilfsbeobachtung 2 gilt: Es gibt mindestens zwölf Gebiete des Typs Ω_{6a} . Allerdings kann es auch nicht mehr als zwölf solcher Gebiete Ω_{6a} geben, wie die folgende Überlegung zeigt: Ist z_E Ecke des Typs ω_{6a} , so hat z_E die Gestalt einer Blume, vgl. Abbildung 2.29, und theoretisch kann jeder der Einheitsvektoren $\pm v_1, \dots, \pm v_6$ einmal den Stiel dieser Blume bilden. Weil es genau zwölf Einheitsvektoren gibt, kann es somit höchstens zwölf verschiedene Blumen geben und damit höchstens zwölf verschiedene Gebiete des Typs Ω_{6a} . Folglich existieren genau zwölf Gebiete des Typs Ω_{6a} . \square

Überträgt man die Ergebnisse aus den Hilfsbeobachtungen 2 und 3 mit Hilfe des Analogieprinzips A.6 wieder auf alle übrigen Fensterrauten R' , so ist klar: Die Verschiebungen einer jeden beliebigen Fensterraute R' in alle möglichen Einheitsrichtungen $\pm w_1, \dots, \pm w_6$ liegen jeweils in genau einem der zwölf verschiedenen Gebiete des Typs Ω_{6a} , denn durch Analogiebetrachtungen ändern sich bekanntlich die Eckentypen nicht, sondern nur die Einheitsrichtungen, welche den jeweiligen Typ realisieren!

Damit kann nun aber auch die eingangs gestellte Frage nach der Verschiebung des um den Faktor φ^3 verkleinerten Fensters V beantwortet werden: Weil das verkleinerte Fenster $\varphi^3 V$ von den 30 Fensterrauten R' begrenzt wird und die Gebiete im Fenster V nach

3. Deflation im Fall von Penrose 3D

Konstruktion allesamt zusammenhängend sind, wird φ^3V insgesamt für jede der Einheitsrichtungen $\pm w_i$ mit $1 \leq i \leq 6$ in genau eines der zwölf Gebiete Ω_{6a} verschoben. Mit anderen Worten: Nicht nur die um eine beliebige Einheitsrichtung $w_i \in \{\pm w_1, \dots, \pm w_6\}$ verschobene Raute $R'_{(5,-6)}$ liegt in einem bestimmten Gebiet Ω_{6a} , sondern das gesamte um diese Einheitsrichtung w_i verschobene gestauchte Fenster φ^3V liegt dann in eben diesem Gebiet Ω_{6a} !²⁷

Für die Nachbarecken $z_E \mp v_i$ mit $1 \leq i \leq 6$ aller Ecken z_E mit $z_F \in \varphi^3V$ im Muster M_E folgt somit: Es sind allesamt Ecken des Typs ω_{6a} und daher sind auch alle Nachbarecken $z_{E'} \pm \varphi^3v_i$ einer alten Ecke $z_{E'}$ im feinen Muster SM_E genau Ecken dieses Typs! \square

Kehren wir mit diesen Ergebnissen zu Abbildung 3.2 zurück: Wir wissen nun, dass die Nachbarecken $z_{E'} \pm \varphi^3v_i$ der gelb eingezeichneten alten Punkte $z_{E'}$ im Muster SM_E für alle $1 \leq i \leq 6$ Ecken des Typs ω_{6a} sind und damit alle die Gestalt einer Blume haben. Da dieses Ergebnis wieder unabhängig von der Wahl eines bestimmten Pflastersteins oder anderen Festlegungen ist, erhalten wir auch im zweiten Deflationszug ein global eindeutiges Ergebnis!

Wie aber liegen diese Blumenecken jeweils an den alten Ecken $z_{E'}$ an? Dies entspricht der Frage, welche der sechs Einheitsrichtungen im feinen Muster SM_E die jeweilige Ecke $z_{E'} \pm \varphi^3v_i$ des Typs ω_{6a} für $1 \leq i \leq 6$ konkret realisieren. Wegen der Dichtheit der Ecken – jeder alte Punkt $z_{E'}$ in SM_E ist bekanntlich Ecke des Typs ω_{12} und lässt somit stets die maximale Anzahl von zwölf Nachbarpunkten zu – bleibt eigentlich keine andere Möglichkeit als die folgende:

Beobachtung 3.7. *Für alle $1 \leq i \leq 6$ gilt: Die Nachbarecken $z_{E'} \pm \varphi^3v_i$ aller alten Ecken $z_{E'}$ im feinen Muster SM_E liegen jeweils derart an, dass die Kante zwischen $z_{E'}$ und $z_{E'} \pm \varphi^3v_i$ stets die Rolle des Stiels der blumenförmigen Ecke $z_{E'} \pm \varphi^3v_i$ spielt.*

Beweis. Mit Hilfe der Ergebnisse aus Kapitel 1, vgl. insbesondere Abbildung 1.5, ergibt sich für eine beliebige alte Ecke $z_{E'}$ im feinen Muster SM_E die in Abbildung 3.11 dargestellte Situation. Um nun zu klären, wie die Nachbarecken des Typs ω_{6a} an einer beliebigen alten Ecke $z_{E'}$ anliegen, soll im Folgenden exemplarisch geklärt werden: Wie liegt die Nachbarecke $z_{E'} + \varphi^3v_6$ einer alten Ecke $z_{E'}$ im feinen Muster SM_E an, d. h. welche der sechs Einheitsrichtungen $\pm \varphi^3v_1, \dots, \pm \varphi^3v_6$ realisieren ganz konkret diese Ecke des Typs ω_{6a} ? Gemäß unseren Vorüberlegungen kann diese Frage mit Hilfe des Musters M_E beantwortet werden. Wir müssen dazu fragen: Welche der Einheitsrichtungen $\pm v_1, \dots, \pm v_6$ realisieren im Muster M_E die Nachbarecke $z_E - v_6$, wobei für den zu z_E gehörigen Projektionspunkt z_F gilt $z_F \in \varphi^3V$?

Das wiederum ist nichts anderes als die Frage, in welchem der zwölf Gebiete Ω_{6a} von V die Verschiebung des verkleinerten Fensters φ^3V in Richtung $-w_6$ liegt, und diese wurde bereits in der Tabelle im Beweis zu Beobachtung 3.6 beantwortet: In Fußnote 27 war festgehalten worden, dass die Verschiebung von φ^3V in Richtung $-w_6$ in dem

²⁷Tabelle 3.1 nennt somit nicht nur, welche Einheitsrichtungen $\pm w_1, \dots, \pm w_6$ die von der um eine Einheitsrichtung verschobenen Raute $R'_{(5,-6)}$ überlagerten Gebiete Ω_{6a} jeweils konkret erlauben, sondern sie gibt gleichzeitig Auskunft darüber, in welchem der Gebiete Ω_{6a} das um diese Einheitsrichtung verschobene gestauchte Fenster φ^3V insgesamt liegt!

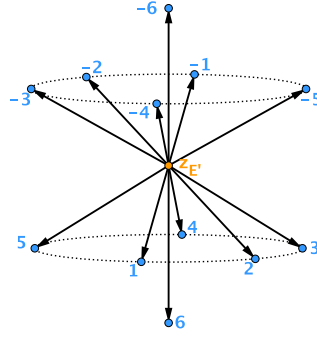


Abbildung 3.11.: Eine beliebige alte Ecke $z_{E'}$ in SM_E samt ihren zwölf Nachbarecken

Gebiet Ω_{6a} liegt, welches die folgenden sechs Einheitsrichtungen erlaubt: $-w_1$ und $-w_2$ sowie $-w_3$ und $-w_4$ sowie $-w_5$ und $+w_6$. Folglich existieren im Projektionsraum E von $z_E - v_6$ aus die Richtungen $-v_1$ und $-v_2$ sowie $-v_3$ und $-v_4$ sowie $-v_5$ und $+v_6$, vgl. Kriterium 2.2. Wenden wir die Ähnlichkeitsabbildung S auf eben diese Resultate an, d. h. auf die genannten Einheitsrichtungen, so wissen wir, welche der Einheitsvektoren $\pm\varphi^3v_1, \dots, \pm\varphi^3v_6$ für die gewählte Nachbarecke $z_{E'} + \varphi^3v_6$ im feinen Muster SM_E erlaubt sind: $S(-v_1) = \varphi^3v_1$ und $S(-v_2) = \varphi^3v_2$ sowie $S(-v_3) = \varphi^3v_3$ und $S(-v_4) = \varphi^3v_4$ sowie $S(-v_5) = \varphi^3v_5$ und $S(v_6) = -\varphi^3v_6$, vgl. Fußnote 24.

Mit diesem Wissen können wir die Nachbarecke $z_{E'} + \varphi^3v_6$ in Abbildung 3.11 einzeichnen.

Bemerkung. Der Übersicht halber bezeichnen wir in Abbildung 3.11 und im Folgenden für $1 \leq i \leq 6$ die Nachbarecke $z_{E'} \pm \varphi^3v_i$ im feinen Muster SM_E oft nur mit $\pm i$. Analog dazu bezeichnen wir für alle $1 \leq i, j \leq 6$ den Nachbarpunkt $z_{E'} \pm \varphi^3v_i \pm \varphi^3v_j$ im feinen Muster SM_E nur mit $\pm i, \pm j$.

Wir sehen: Die Kante zwischen den Punkten $(z_{E'} + \varphi^3v_6) - \varphi^3v_6 = z_{E'}$ und $z_{E'} + \varphi^3v_6$ übernimmt, wie behauptet, die Rolle des Stiels dieser blumenförmigen Ecke $z_{E'} + \varphi^3v_6$.

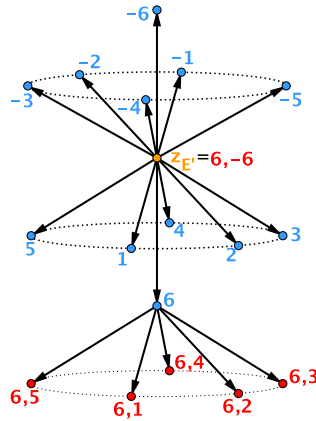


Abbildung 3.12.: Die Nachbarecke 6 einer beliebigen alten Ecke $z_{E'}$ im Muster SM_E samt den erlaubten Einheitsrichtungen 1 und 2 sowie 3 und 4 sowie 5 und -6, rot markiert

3. Deflation im Fall von Penrose 3D

Diese Überlegung kann nun für jede beliebige Nachbarecke $z_{E'} \pm \varphi^3 v_i$ mit $1 \leq i \leq 6$ durchgeführt werden, und damit ist Beobachtung 3.7 gezeigt. Folgende Tabelle fasst in der vereinfachten Notation gemäß der Bemerkung auf Seite 83 noch einmal zusammen, welche Einheitsrichtungen $\pm i$ mit $1 \leq i \leq 6$ im zweiten Deflationszug im feinen Muster SM_E jeweils erlaubt sind.

Nachbarpunkt von $z_{E'}$	Erlaubte Einheitsrichtungen
Nachbarpunkt +1	$-1, +2, -3, -4, +5, +6$
Nachbarpunkt -1	$+1, -2, +3, +4, -5, -6$
Nachbarpunkt +2	$+1, -2, +3, -4, -5, +6$
Nachbarpunkt -2	$-1, +2, -3, +4, +5, -6$
Nachbarpunkt +3	$-1, +2, -3, +4, -5, +6$
Nachbarpunkt -3	$+1, -2, +3, -4, +5, -6$
Nachbarpunkt +4	$-1, -2, +3, -4, +5, +6$
Nachbarpunkt -4	$+1, +2, -3, +4, -5, -6$
Nachbarpunkt +5	$+1, -2, -3, +4, -5, +6$
Nachbarpunkt -5	$-1, +2, +3, -4, +5, -6$
Nachbarpunkt +6	$+1, +2, +3, +4, +5, -6$
Nachbarpunkt -6	$-1, -2, -3, -4, -5, +6$

Tabelle 3.2.: Diese Einheitsrichtungen sind im feinen Muster SM_E im zweiten Deflationszug erlaubt. Bezüglich der Notation siehe die Bemerkung auf Seite 83.

□

Abbildung 3.2 lässt sich mit diesem Wissen um die neuen Ergebnisse ergänzen. Der Übersicht halber sind in Abbildung 3.13 jedoch nur die Nachbarecken des Typs ω_{6a} ein-

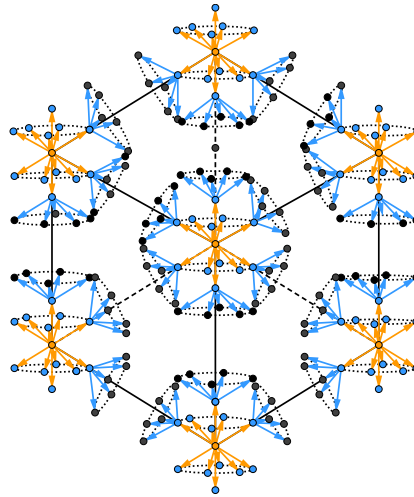


Abbildung 3.13.: Die Nachbarecken $z_{E'} \pm \varphi^3 v_i$ der gelben Ecken $z_{E'}$ in SM_E sind für alle $1 \leq i \leq 6$ Ecken des Typs ω_{6a} .

gezeichnet, welche in Richtung der Kanten des groben flachen Steins liegen, tatsächlich gilt dieses Ergebnis für alle $8 \cdot 12 = 96$ Nachbarecken ω_{6a} , und ebenso auch für den langen Pflasterstein!

Auf diese Weise sind wir wieder einen Schritt weiter in der Frage nach der Unterteilung der Pflastersteine im Fall des dreidimensionalen Penrose-Musters. Wir sehen aber auch, dass die bisherigen Ergebnisse noch immer nicht ausreichen, um diese Frage vollständig beantworten zu können. In einem nächsten Schritt ist daher konsequenterweise zu klären: Was sind die möglichen Nachbarecken der soeben ermittelten Nachbarpunkte des Typs ω_{6a} einer beliebigen alten Ecke $z_{E'}$ im feinen Muster SM_E ? Gibt es auch hier wieder ein global eindeutiges Ergebnis?

3.3. Der dritte Deflationszug: Verlust der Eindeutigkeit

Theoretisch können wir die in 3.2 angestellten Überlegungen ein weiteres Mal ausführen. Für den Nachbarpunkt $z_{E'} + \varphi^3 v_6 + \varphi^3 v_3$ der in Beobachtung 3.7 gewählten Nachbarecke $z_{E'} + \varphi^3 v_6$ einer beliebigen alten Ecke $z_{E'}$ hieße das beispielsweise: Um zu erfahren, welcher Eckentyp ω_j mit $j = 4, 5, 6_a, 6_b, 7, 8, 9, 10, 12$ der Nachbarpunkt $z_{E'} + \varphi^3 v_6 + \varphi^3 v_3$ des Punktes $z_{E'} + \varphi^3 v_6$ im feinen Muster SM_E ist, müssen wir klären, welcher Eckentyp ω_j mit $j = 4, 5, 6_a, 6_b, 7, 8, 9, 10, 12$ der Nachbarpunkt $z_E - v_6 - v_3$ des Punktes $z_E - v_6$ im Muster M_E ist, wobei für den zu z_E gehörigen Punkt z_F im Hilfsraum F wieder gilt $z_F \in \varphi^3 V$.

Das bedeutet nun aber nichts anderes, als dass wir das verkleinerte Fenster φ^3 , genauer gesagt die 30 Begrenzungsrauten R' von $\varphi^3 V$, in Richtung $-w_6 - w_3$ verschieben und anschließend bestimmen müssen, welche Gebiete Ω_j mit $j = 4, 5, 6_a, 6_b, 7, 8, 9, 10, 12$ von dieser Verschiebung überlagert werden. Damit erhalten wir den Eckentyp des Nachbarpunktes $z_E - v_6 - v_3$ in M_E und somit auch sofort den Eckentyp des Nachbarpunktes $z_{E'} + \varphi^3 v_6 + \varphi^3 v_3$ im feinen Muster SM_E . Wollen wir zusätzlich zum Eckentyp auch wissen, welche Einheitsrichtungen $\pm \varphi^3 v_1, \dots, \pm \varphi^3 v_6$ diese Ecke in SM_E realisieren, so müssen wir noch Abbildung S auf die Ergebnisse des Musters M_E anwenden, vgl. Fußnote 24. Das Vorgehen gestaltet sich demnach völlig analog zu dem in Beobachtung 3.6, der einzige Unterschied besteht darin, dass wir das verkleinerte Fenster $\varphi^3 V$ nun in zwei Einheitsrichtungen verschieben und nicht nur in eine. An der generellen Methode ändert das jedoch nichts!

In der Praxis ist es jedoch so, dass eben beschriebenes Vorgehen das folgende Resultat liefert:

Beobachtung 3.8. *Im Gegensatz zum ersten und zweiten Deflationszug ist der dritte Deflationszug nicht mehr global eindeutig.*

Beweis. Wir wenden das oben beschriebene Vorgehen, welches analog ist zu dem Beweis von Beobachtung 3.6, nicht auf eine der 30 Fensterrauten R , sondern auf den Querschnitt durch den Mittelpunkt von $\varphi^3 V$ an.²⁸ Tabelle 3.1 gibt dabei Auskunft, welche

²⁸Da die Verschiebung des verkleinerten Fensters $\varphi^3 V$ in zwei Einheitsrichtungen in nicht mehr nur

3. Deflation im Fall von Penrose 3D

Kombinationen von Einheitsrichtungen überhaupt möglich sind.²⁹ In Analogie zum bisherigen Vorgehen wollen wir die Verschiebung des Querschnitts durch den Mittelpunkt von $\varphi^3 V$ parallel zu der Fensterraute $R'_{(5,-6)}$ in Richtung der Einheitsvektoren $-w_6 - w_3$ betrachten. Damit ergeben sich folgende Schritte:

1. Verschiebung des Querschnitts in Richtung $-w_6 - w_3$ mittels der schon bekannten Zerlegung der Einheitsvektoren in ihre jeweilige Lateral- und Höhenkomponente, vgl. A.3
2. Überprüfung, welche Gebiete $\Omega_4, \dots, \Omega_{12}$ im Fenster V von dieser Verschiebung überlagert werden

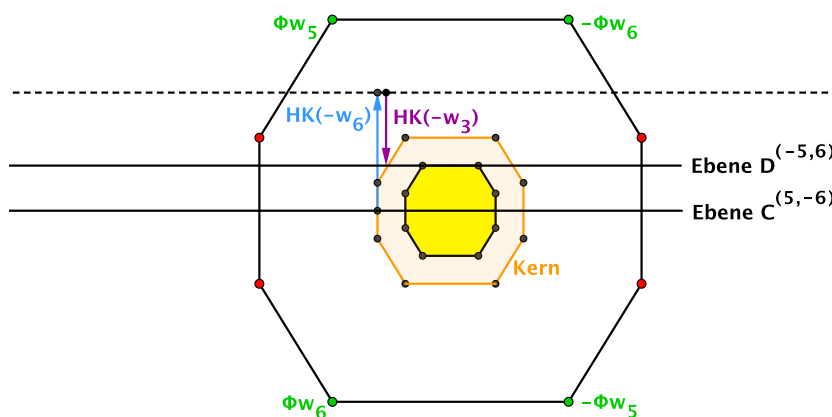
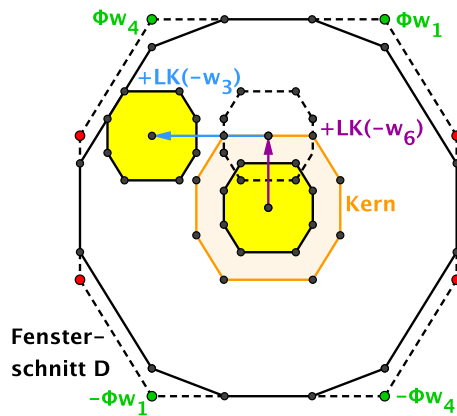


Abbildung 3.14.: Die Verschiebung des Querschnitts des verkleinerten Fensters $\varphi^3 V$ in Richtung $-w_6 - w_3$ liegt auf der Ebene $D^{(-5,6)}$.

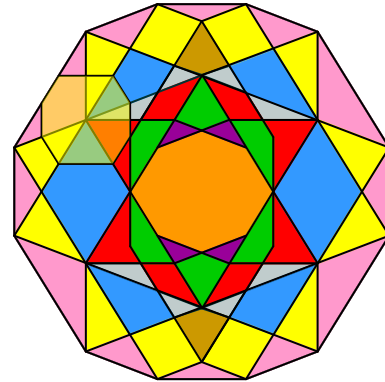
In Abbildung 3.14 sehen wir durch Abtragen der Höhenkomponenten von $-w_6$ und $-w_3$, dass die Verschiebung des Querschnitts auf der Ebene $D^{(-5,6)}$ liegt, eine Ebene, die uns bereits des Öfteren begegnet ist. Trägt man in einem zweiten Schritt die Lateral-komponenten von $-w_6$ und $-w_3$ auf dem Fensterschnitt \mathcal{D} ab, so erhält man die genaue Lage des um diese beiden Einheitsrichtungen verschobenen Querschnitts auf der Ebene $D^{(-5,6)}$ und sieht damit schließlich, welche Gebiete von der ermittelten Verschiebung überlagert werden, siehe Abbildung 3.15. Es sind je ein Gebiet des Typs Ω_4 (rosa) und Ω_7 (grau) sowie Ω_8 (rot) und je zwei Gebiete des Typs Ω_5 (gelb) sowie Ω_{6a} (blau). Im dritten Deflationszug gibt es folglich kein global eindeutiges Ergebnis mehr!

einem Gebiet liegt, kann bereits ein einziges Bild zeigen, dass der dritte Deflationszug nicht mehr global eindeutig ist. Der gewählte Querschnitt zeigt diesen Sachverhalt gerade besonders gut auf.

²⁹Im ersten Deflationszug werden alle alten Ecken $z_{E'}$ des Musters $M_{E'}$ in Ecken des Typs ω_{12} im feinen Muster SM_E transformiert, d. h. von $z_{E'}$ aus sind alle Einheitsrichtungen möglich. Die Nachbarecken dieser alten Ecken $z_{E'}$ sind jedoch allesamt Ecken des Typs ω_{6a} und lassen somit nur jeweils sechs der zwölf Einheitsrichtungen zu. Folglich ist nicht jede beliebige Kombination von zwei Einheitsrichtungen erlaubt!



(a) Hier liegt die Verschiebung des Querschnitts durch den Mittelpunkt des verkleinerten Fensters $\varphi^3 V$ parallel zu Raute $R'_{(5,-6)}$.



(b) Diese Gebiete werden von dem nach $-w_6$ und $-w_3$ verschobenen Querschnitt des verkleinerten Fensters $\varphi^3 V$ auf der Ebene $D^{(-5,6)}$ überlagert.

Abbildung 3.15.: Diese Bilder zeigen, dass der dritte Deflationszug kein global eindeutiges Ergebnis mehr liefert.

□

Was hat dies zu bedeuten? Gibt es etwa im Fall des dreidimensionalen Penrose-Musters keine eindeutige Unterteilung der Pflastersteine? Diese Frage kann zum jetzigen Zeitpunkt noch nicht ganz beantwortet werden,³⁰ jedoch ist klar: Es gibt kein Ergebnis mehr, welches wie im ersten und zweiten Deflationszug für jeden beliebigen Pflasterstein gilt, also global eindeutig ist. Das heißt aber noch nicht, dass es für den langen und für den flachen Stein jeweils für sich genommen nicht doch eine eindeutige Unterteilung geben kann!

3.4. Die Linsen

Tragen wir an dieser Stelle die bisher gewonnenen Ergebnisse zusammen. Wir wissen nicht nur, was im ersten und zweiten Deflationszug passiert, aus Beobachtung 2.22 ist uns vielmehr auch bekannt, welche Pflastersteine an einer Ecke des Typs $\omega_{\delta a}$, also an einer sogenannten Blumenecke, die im zweiten Deflationszug hinzukommt, anliegen: zwei flache und sechs lange Steine. Die Lage der Pflastersteine zwischen dem Stiel und den Blütenblättern ist dabei eindeutig bestimmt, es liegen fünf der sechs langen Steine dort an.

³⁰Dies liegt daran, dass wir bis jetzt immer mit dem gesamten Fenster V gearbeitet haben. Tatsächlich müssen wir unsere Überlegungen jedoch nur für den Teil von V anstellen, der einen gegebenen Pflasterstein auch wirklich realisiert, vgl. 3.5!

3. Deflation im Fall von Penrose 3D

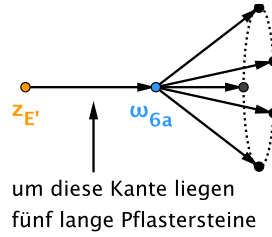
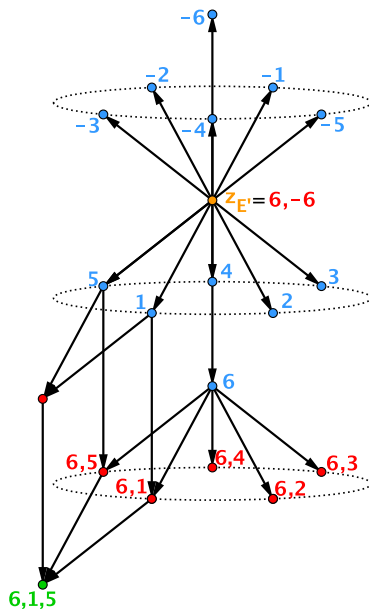
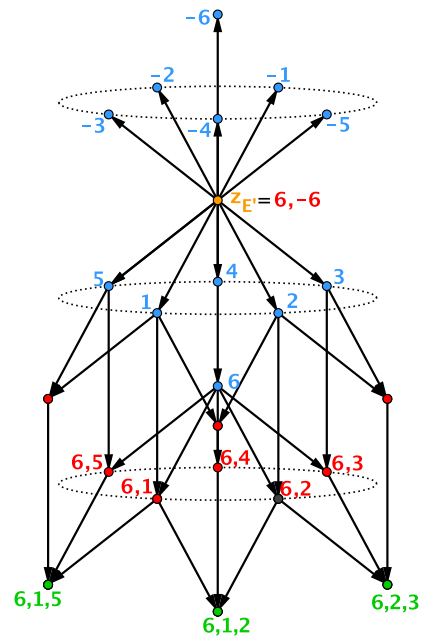


Abbildung 3.16.: Zwischen dem Stiel und den Blütenblättern einer Ecke des Typs ω_{6a} liegen fünf lange Pflastersteine an.

Für die in Abbildung 3.12 exemplarisch betrachtete Nachbarecke $z_{E'} + \varphi^3 v_6$ einer beliebigen alten Ecke $z_{E'}$ im feinen Muster SM_E ergibt sich damit die folgende Situation:



(a) Zwischen Stiel und Blütenblättern liegen fünf lange Pflastersteine an. Exemplarisch ist hier einer der Steine eingezeichnet.



(b) Zwischen Stiel und Blütenblättern liegen fünf lange Pflastersteine an. Exemplarisch sind hier drei der Steine eingezeichnet.

In diesem Zusammenhang ist nun die folgende Beobachtung wichtig:

Beobachtung 3.9. Die fünf Einheitsvektoren einer Ecke des Typs ω_{6a} , welche gemeinsam die Blütenblätter dieser Ecke bilden, spannen mit ihren beiden direkten Nachbarn jeweils eine Goldene Raute auf.

Beweis. Dies folgt sofort aus obiger Abbildung: Zwischen dem Stiel und den Blütenblättern einer Ecke des Typs ω_{6a} liegen fünf lange Pflastersteine an, und je zwei benachbarte Blütenblätter bilden aus diesem Grund eine gemeinsame Raute, also eine Grundseite dieser Steine. \square

Bemerkung. Auf den ersten Blick mag es völlig offensichtlich erscheinen, dass zwei benachbarte Einheitsvektoren auch eine gemeinsame Raute aufspannen. Tatsächlich ist dies aber nicht immer der Fall. Betrachten wir dazu die schematische Darstellung von sechs Einheitsvektoren, welche gemeinsam in einem Halbraum liegen und nehmen an, die folgenden vier farbig markierten Einheitsrichtungen existieren:

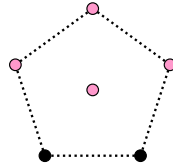
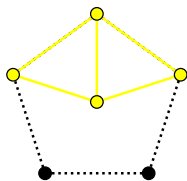
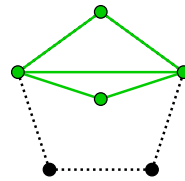


Abbildung 3.17.: In diesem Beispiel existieren die vier farbig markierten Ikosaederecken.

Welche Möglichkeiten gibt es, mit diesen vier Einheitsrichtungen einen Pflasterstein zu bilden? Dazu müssen wir gemäß den Überlegungen auf Seite 16 fragen: Welche der Kombinationen 1 bis 4 lassen sich in obiger Abbildung realisieren? Ein Vergleich zeigt, dass es insgesamt zwei verschiedene Möglichkeiten gibt:



(a) Zweimal Kombination 1: Es werden zwei lange Pflastersteine gebildet.



(b) Zweimal Kombination 2: Es werden zwei flache Pflastersteine gebildet.

Wir sehen damit: In Abbildung (a) ist es tatsächlich so, dass je zwei benachbarte Einheitsrichtungen eine gemeinsame Raute bilden. In Abbildung (b) dagegen spannen die beiden mittleren Einheitsvektoren nur mit jeweils zwei von drei benachbarten Einheitsrichtungen eine Raute auf!

Für die exemplarisch gewählte Nachbarecke $z_{E'} + \varphi^3 v_6$ einer beliebigen alten Ecke $z_{E'}$ im Muster SM_E ergibt sich damit die Situation, wie in Abbildung 3.18 dargestellt.

3. Deflation im Fall von Penrose 3D

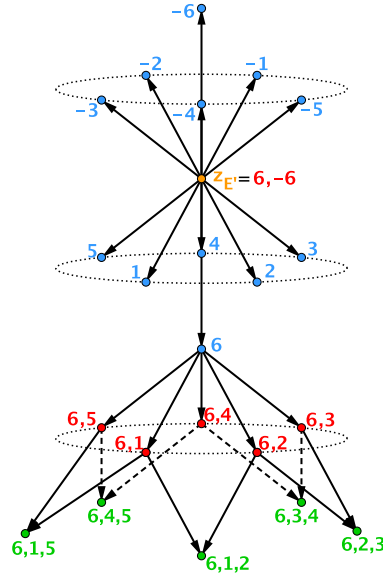


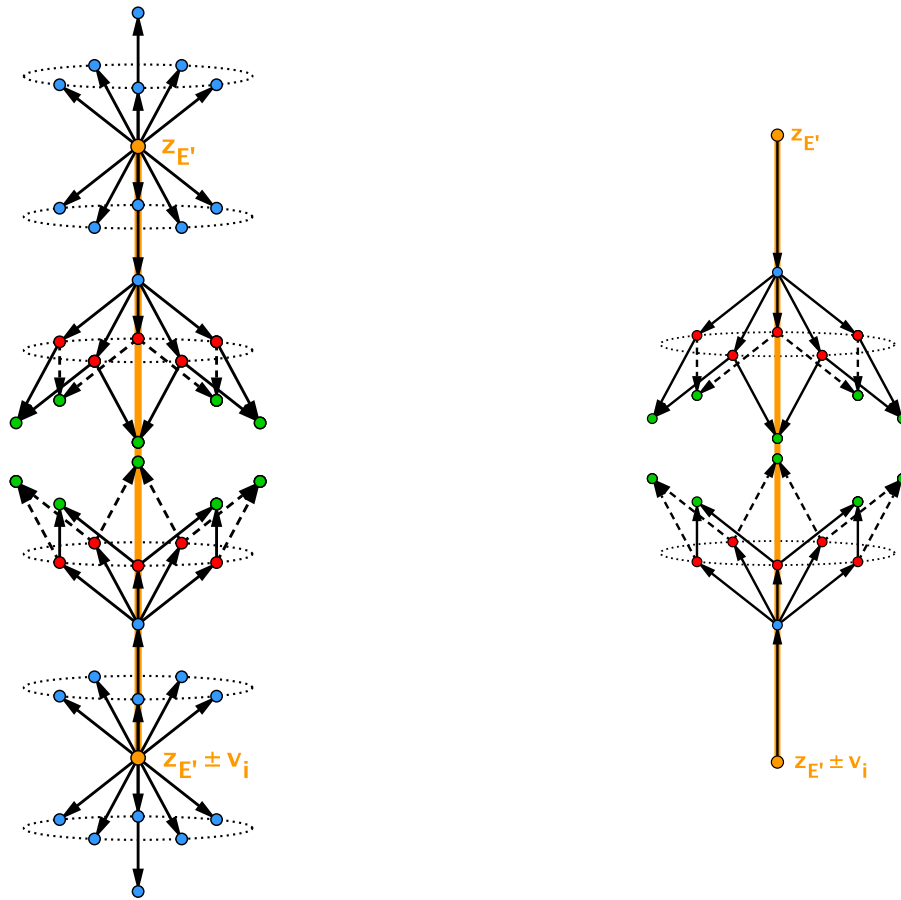
Abbildung 3.18.: Von der Nachbarecke $z_{E'} + \varphi^3 v_6$ aus spannen die Einheitsrichtungen $+\varphi^3 v_1$ bis $+\varphi^3 v_5$ jeweils mit ihren beiden direkten Nachbarn eine Raute auf. Die langen Pflastersteine, welche zwischen dem Stiel und den Blütenblättern anliegen, sind der Übersicht halber nicht eingezeichnet.

Dieses Ergebnis gilt nun aber nicht nur für die exemplarisch gewählte Ecke $z_{E'} + \varphi^3 v_6$, sondern für jede der zwölf Nachbarecken eines beliebigen alten Punktes $z_{E'}$ im feinen Muster SM_E . Wegen dieser allgemeinen Gültigkeit lassen wir im Folgenden die Beschriftung in den Abbildungen weg und kennzeichnen die unterschiedlichen Eckentypen nur mehr durch Farben:

- Alte Punkte in SM_E , d. h. Punkte, welche auch schon im groben Muster $M_{E'}$ existieren, sind gelb markiert. Es sind bekanntlich allesamt Ecken des Typs ω_{12} .
- Die Nachbarecken dieser alten Punkte $z_{E'}$ im feinen Muster SM_E , d. h. die Punkte $z_{E'} \pm \varphi^3 v_i$ mit $1 \leq i \leq 6$, sind blau gekennzeichnet. Es sind alles Ecken des Typs ω_{6a} .
- Die übernächsten Nachbarn der alten Ecken $z_{E'}$ in SM_E , genannt *zweite Nachbarn*, sind rot markiert. Beobachtung 3.8 hat gezeigt: Für diese zweiten Nachbarn existiert im Hinblick auf den Eckentyp kein global eindeutiges Ergebnis mehr!
- Die *dritten Nachbarn* im feinen Muster SM_E sind grün gekennzeichnet. Ihre Existenz folgt aus Beobachtung 3.9, über deren Eckentyp ist soweit noch nichts bekannt.

Betrachten wir die Kante eines beliebigen Pflastersteins im groben Muster $M_{E'}$ und tragen die bisherigen Ergebnisse nicht nur für den Punkt $z_{E'}$ an, sondern auch für dessen Nachbarnpunkt $z_{E'} \pm v_i$ mit $1 \leq i \leq 6$ im groben Muster $M_{E'}$, so erhalten wir:³¹

³¹Beachte dabei: Die grün markierten dritten Nachbarn liegen nicht wirklich auf der gelb markierten Kante, wie es in der Abbildung den Anschein hat!



(a) Die Kante eines beliebigen Pflastersteins im groben Muster $M_{E'}$ mit den beiden Eckpunkten $z_{E'}$ und $z_{E'} \pm v_i$ mit $1 \leq i \leq 6$

(b) Abbildung (a) mit jeweils nur der Nachbarecke in Richtung der Kante des groben Steins. Hierauf kommt es momentan an!

Abbildung 3.19.: Die Unterteilung einer beliebigen Kante des groben Musters $M_{E'}$

Wie wir sehen, ist die Kante eines beliebigen Pflastersteins im groben Muster $M_{E'}$ damit beinahe schon vollständig unterteilt. Mit Hilfe der folgenden Beobachtung gelingt es, die noch fehlende Lücke zu schließen:

Beobachtung 3.10. *Unterscheiden sich im dreidimensionalen Penrose-Muster zwei Punkte um einen erlaubten Kantenvektor, so sind sie durch eine Kante verbunden.*

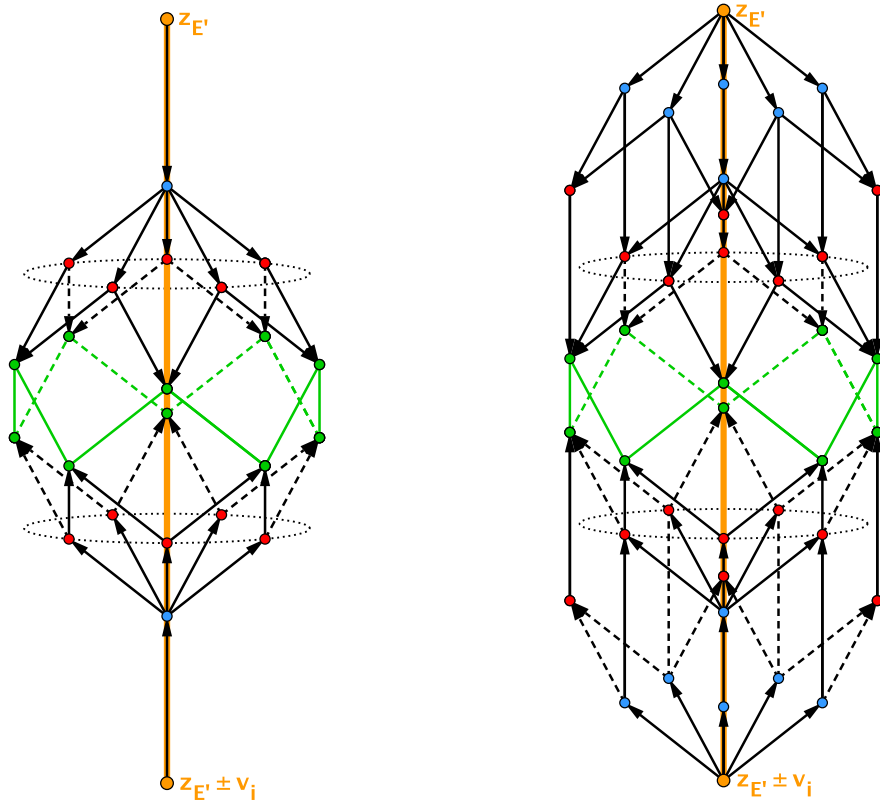
Beweis. Seien ganz allgemein z_E und $z_{E'}$ zwei Punkte im Muster M_E , die sich um einen erlaubten Kantenvektor unterscheiden, d. h. $z_E z_{E'} = v_k$ ³² und $|z_E z_{E'}| = |v_k|$ mit $v_k \in \{\pm v_1, \dots, \pm v_6\}$. Wir wollen zeigen, dass die Kante zwischen z_E und $z_{E'}$ auch tatsächlich existiert.

³²Beachte: Die Differenz zweier Punkte ist ein *Vektor*!

3. Deflation im Fall von Penrose 3D

Für den Urbildpunkt $z = \pi_E^{-1}(z_E)$ im Ausgangsraum W gilt $z \in (E + I^6) \subset \mathbb{R}^6$, vgl. Äquivalenz-Kriterium 2.1, und der erlaubten Kantenrichtung v_k im Projektionsraum E entspricht die Einheitsrichtung $e_k = \pi_E^{-1}(v_k)$. Laufen wir nun von z aus entlang dieser Einheitsrichtung, so gelangen wir zu dem Punkt $z + e_k = z''$. Da der Hilfsraum F jedoch irrational ist, d. h. außer dem Nullvektor existiert dort kein ganzzahliger Vektor, können nicht zwei Gitterpunkte aus dem Streifen $(E + I^6) \subset \mathbb{R}^6$ auf den gleichen Punkt in E projiziert werden. Daher muss gelten $z'' = z' = \pi_E^{-1}(z_{E'})$. Mit den Punkten z und z' liegt aber auch die Verbindung dieser beiden Punkte innerhalb des Streifens $(E + I^6) \subset \mathbb{R}^6$, denn der sechsdimensionale Einheitswürfel I^6 ist konvex. Folglich existiert im Muster M_E die Kante zwischen z_E und $z_{E'}$. \square

Da sich die dritten Nachbarn einer beliebigen alten Ecke $z_{E'}$, also die grün gekennzeichneten Punkte in Abbildung 3.19, und deren Nachbarecke $z_{E'} \pm v_i$ mit $1 \leq i \leq 6$ nun genau um einen erlaubten Kantenvektor unterscheiden, kann obige Abbildung vervollständigt werden:



(a) An jeder beliebigen Kante des Musters $M_{E'}$ hängt eine solche Linse.

(b) Ferner wissen wir: Links und rechts der Linse umschließen je fünf lange Pflastersteine die Kante, vgl. Abbildung 3.16.

Abbildung 3.20.: Die fertige Unterteilung einer beliebigen Kante des groben Musters $M_{E'}$

Wir erhalten damit ein konvexes gleichseitiges Polyeder, welches *Linse* (F_{20} , siehe [C], [MT]) genannt werden soll. Es besteht aus zwanzig Goldenen Rauten und umschließt einen Teil jeder beliebigen Kante eines groben Pflastersteins im Muster $M_{E'}$.

Beobachtung 3.11. *Die Linsen sind neben dem ersten und zweiten Deflationszug ein weiteres global eindeutiges Ergebnis.*

Beweis. Dies folgt aus der gezeigten Konstruktion der Linsen, denn alle Elemente, die dazu verwendet wurden, sind global eindeutig: Der erste und der zweite Deflationszug sowie die Beobachtungen 3.9 und 3.10 sind jeweils unabhängig von der Wahl eines bestimmten Pflastersteins oder sonstigen Festlegungen. \square

Zusammen mit den Ergebnissen aus dem ersten und zweiten Deflationszug haben wir damit insgesamt eine bis zu einem gewissen Punkt feste Struktur für die Unterteilung eines jeden beliebigen Pflastersteins des dreidimensionalen Penrose-Musters gefunden. Diese Struktur wollen wir in einem Prinzipbild festhalten:

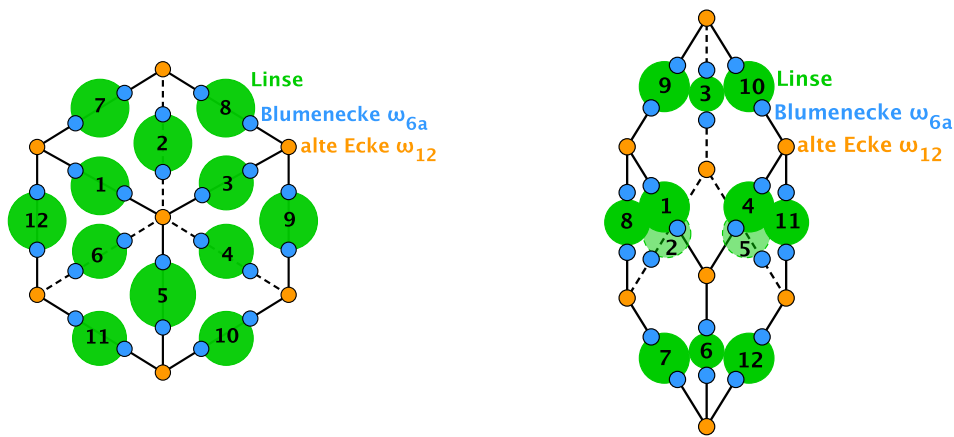


Abbildung 3.21.: Die Unterteilung der Kanten eines beliebigen Pflastersteins: links der flache Stein und rechts der lange Stein

Bemerkung. Die Linsen 1 bis 6 sollen für beide Pflastersteine im Folgenden *innere Linsen*, die Linsen 7 bis 12 entsprechend *äußere Linsen* genannt werden.

In Bezug auf die Unterteilung der beiden Pflastersteine im Fall des dreidimensionalen Penrose-Musters sind wir damit ein gutes Stück vorangekommen. Zu klären bleibt:

1. Wie sieht die Umgebung um eine alte Ecke $z_{E'}$ aus: Wir wissen, dass diese alten Ecken allesamt vom Typ ω_{12} sind, doch welche Pflastersteine liegen hier an?
2. Wie werden die Linsen mit langen und flachen Steinen gefüllt?
3. Was passiert im Inneren der beiden Pflastersteine? Hier sehen wir in Abbildung 3.22 noch größere Lücken.

3. Deflation im Fall von Penrose 3D

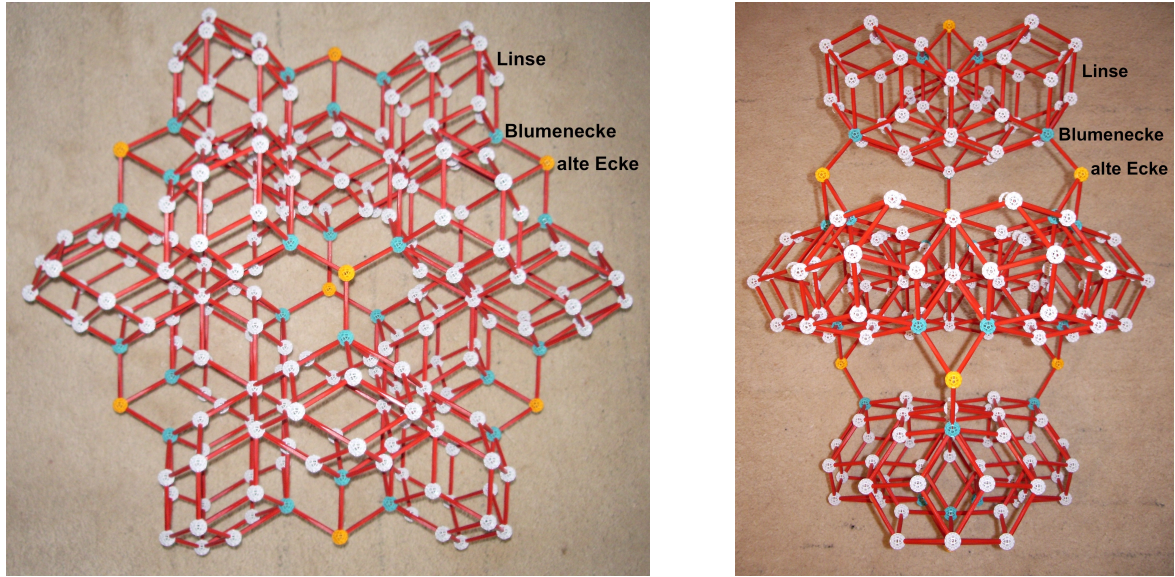


Abbildung 3.22.: Links der grobe flache Stein und recht der grobe lange Stein samt Linsen

Frage 1 kann mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse sofort beantwortet werden:

Beobachtung 3.12. *Um jede alte Ecke $z_{E'}$ des feinen Musters SM_E liegen 20 lange Pflastersteine an.*

Beweis. Jede beliebige alte Ecke $z_{E'}$ im feinen Muster SM_E ist eine Ecke des Typs ω_{12} , vgl. 3.1. Nach 3.2 sind die Nachbarecken dieser alten Ecke $z_{E'}$ allesamt Ecken des Typs ω_{6a} , also sogenannte Blumenecken. Beobachtung 3.7 klärt zudem, wie diese Blumenecken an einer alten Ecke $z_{E'}$ anliegen: Die Kante zwischen $z_{E'}$ und der Nachbarecke spielt stets die Rolle des Stiels einer solchen Blume. Berücksichtigen wir nun noch Beobachtung 2.22, die uns sagt, dass ganz allgemein zwischen dem Stiel und den Blütenblättern einer Ecke des Typs ω_{6a} je fünf lange Pflastersteine anliegen, so ist klar, dass um eine alte Ecke $z_{E'}$ herum nur lange Pflastersteine anliegen, vgl. Abbildung 3.16.

Die Frage ist nur wie viele? Von einem alten Punkt $z_{E'}$ aus sind alle zwölf Einheitsrichtungen möglich. Theoretisch gibt es also $12 \cdot 5 = 60$ lange Pflastersteine. Praktisch ist es jedoch so, dass jeder lange Pflasterstein zu drei Einheitsrichtungen gezählt werden kann.³³ Folglich existieren tatsächlich $60 : 3 = 20$ Pflastersteine. \square

Bemerkung. Die Pflastersteine liegen also gerade in der Weise an der alten Ecke $z_{E'}$ im feinen Muster SM_E an, dass je drei paarweise benachbarte Einheitsrichtungen von $z_{E'}$ ausgehend einen langen Stein aufspannen. Mit anderen Worten: Die Pflastersteine liegen mit ihrer spitzen Ecke an $z_{E'}$ an, vgl. Seite 16. Schematisch lässt sich diese Situation wie folgt darstellen: Fett markiert sind die sechs Ikosaederecken, die gemeinsam in einem Halbraum liegen. Ferner sind noch fünf antipodale Ecken eingezeichnet. Der Antipodenpunkt der in der Mitte des Fünfecks liegenden Ikosaederecke fehlt dagegen.

³³Vgl. Seite 88: Der in der Zeichnung (b) eingezeichnete mittlere Stein liegt nicht nur an der Kante in Richtung $+\varphi^3 v_6$ an, sondern auch an den Kanten in Richtung $+\varphi^3 v_1$ und $+\varphi^3 v_2$!

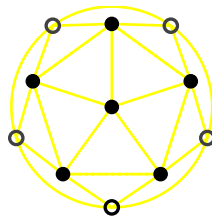


Abbildung 3.23.: 15 der 20 Möglichkeiten von $z_{E'}$ aus einen langen Pflasterstein zu bilden

In obiger Abbildung können wir 15 Möglichkeiten erkennen, die schematische Darstellung eines langen Steins, ausgehend von seiner spitzen Ecke, zu realisieren. Folglich sehen wir 15 der 20 langen Pflastersteine, die um eine alte Ecke $z_{E'}$ herum anliegen. Die restlichen fünf langen Steine werden mit der nicht eingezeichneten antipodalen Ikosaederecke gebildet und sind deshalb in dieser Darstellung nicht sichtbar. Dies ist aber für die folgenden Überlegungen nicht weiter relevant!

Damit ist geklärt, wie die Umgebung um eine beliebige alte Ecke $z_{E'}$ im feinen Muster SM_E aussieht. Offen ist aber noch die Frage, wie viele dieser 20 langen Steine um $z_{E'}$ jeweils auch wirklich im Inneren eines Pflastersteins liegen. Dies muss für den langen und für den flachen Stein sowie deren jeweilige Ecken getrennt beantwortet werden.

Zu Frage 2 gibt es ebenfalls schon eine erste Antwort:

Beobachtung 3.13. *Es existieren genau zehn Möglichkeiten, eine Linse mit langen und flachen Pflastersteinen zu füllen. Diese sind jedoch alle isomorph zueinander und es gilt:*

$$\text{Linse} = 5 \text{ lange Steine} + 5 \text{ flache Steine}.$$

Beweis. Die Linse ist in der Terminologie von H. S. M. Coxeter eines der fünf *Goldenen Isozonoeder*.³⁴ Sie wird dort als *Rhombic Icosahedron* bezeichnet und ihrem Entdecker, dem russischen Kristallographen E. S. Fedorov, sowie der Anzahl ihrer Seitenflächen entsprechend mit F_{20} bezeichnet, siehe [C],[MT],[S3]. Nach Coxeter gilt: $F_{20} = 5A_6 + 5O_6$, wobei A_6 in dieser Terminologie gerade den langen und O_6 den flachen Pflasterstein bezeichnet, siehe Seite 14 und 15. Da die Linse sowohl spiegelsymmetrisch als auch drehsymmetrisch um einen Winkel von 72° ist, gibt es genau zehn zueinander isomorphe Füllmöglichkeiten. \square

Zu klären bleibt, ob auch bei jeder Linse tatsächlich alle zehn Füllmöglichkeiten realisiert werden oder nicht. Ebenfalls offen ist darüber hinaus noch Frage 3, die für die beiden Pflastersteine getrennt voneinander untersucht werden muss. Für das weitere Vorgehen ist es daher notwendig, den langen und den flachen Stein jeweils für sich alleine zu betrachten.

³⁴Die vier übrigen Goldenen Isozonoeder sind: der lange und der flache Pflasterstein, der Rhombentrikontaeder, welchen Coxeter nach dessen Entdecker Kepler mit K_{30} bezeichnet, sowie der Rhombendodekaeder, genannt B_{12} nach dessen Entdecker Bilinski. Der Index in den Bezeichnungen gibt jeweils die Anzahl der Seitenflächen an.

3.5. Die Festlegung auf einen Pflasterstein

Die bisherigen Ergebnisse in Bezug auf die Unterteilung der beiden Pflastersteine im Fall des dreidimensionalen Penrose-Musters waren allesamt global eindeutig, eine Unterscheidung in lange und flache Steine war bis zu diesem Zeitpunkt nicht notwendig, geschweige denn die Festlegung, von welchen der zwölf Einheitsrichtungen $\pm v_i$ mit $1 \leq i \leq 6$ ein gewählter Pflasterstein im Projektionsraum E realisiert werden soll.³⁵

Die Vorgehensweise war zwar richtig, muss nun aber verfeinert werden: Zum einen werden wir die beiden Pflastersteine getrennt voneinander untersuchen, zum anderen wollen wir überlegen, welche Gebiete im Fenster V einen vorgegebenen Stein auch tatsächlich realisieren. Mit eben diesen Gebieten werden wir dann im Folgenden arbeiten!

3.5.1. Die Unterteilung des flachen Pflastersteins

Die Lücke im Inneren des Steins

In einem ersten Schritt soll geklärt werden, was im Inneren des flachen Steins passiert: Mit welchen Pflastersteinen wird die noch unbekannte Lücke gefüllt? Dazu wollen wir uns zunächst ansehen, was an den beiden gegenüberliegenden stumpfen Ecken des groben flachen Steins geschieht: Nach Beobachtung 3.12 liegen im feinen Muster SM_E an diesen beiden alten Ecken jeweils 20 lange Steine mit ihrer spitzen Ecke an. Doch wie viele dieser Steine befinden sich auch wirklich im Inneren des groben flachen Pflastersteins?

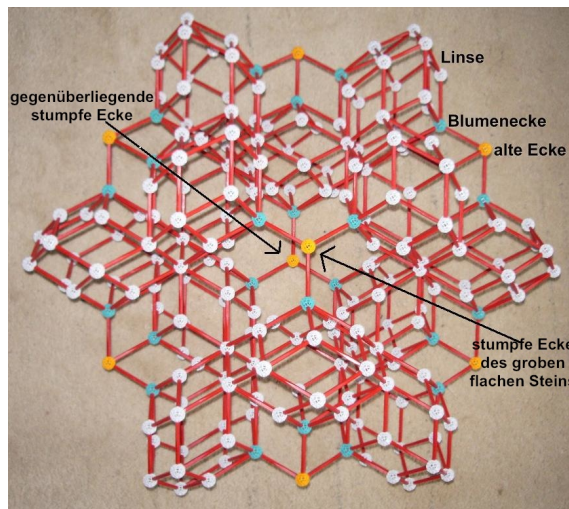


Abbildung 3.24.: Die beiden gegenüberliegenden stumpfen Ecken des flachen Steins im groben Muster M_E

Beobachtung 3.14. *An den zwei stumpfen Ecken des groben flachen Pflastersteins liegen jeweils vier ganze und sechs halbe lange Pflastersteine des feinen Musters SM_E im Inneren des Steins.*

³⁵Grund hierfür ist, dass im ersten und zweiten Deflationszug das gesamte Fenster V verkleinert und anschließend in eine beliebige Einheitsrichtung verschoben wurde!

Beweis. Dies kann mit Hilfe der schematischen Darstellung der Pflastersteine geklärt werden: In Abbildung 3.23 sehen wir 15 der 20 langen Pflastersteine, welche an einer beliebigen alten Ecke $z_{E'}$ im Muster SM_E mit ihrer spitzen Ecke anliegen. Um nun zu ermitteln, welche dieser langen Steine an einer stumpfen Ecke des groben flachen Steins auch wirklich im Inneren dieses Steins liegen, müssen wir zusätzlich die schematische Darstellung einer stumpfen Ecke des flachen Steins in Abbildung 3.23 einzeichnen.

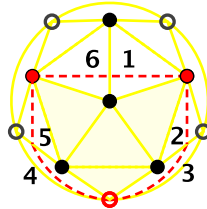


Abbildung 3.25.: Eine stumpfe Ecke des flachen Steins samt 15 der insgesamt 20 Möglichkeiten, mit den dargestellten Ikosaederecken einen langen Stein, ausgehend von einer spitzen Ecke, zu realisieren

Bemerkungen zu Abbildung 3.25:

- Rot markiert sind die drei Ikosaederecken, die eine stumpfe Ecke des flachen Steins bilden: Es sind paarweise übernächste Nachbarn im Ikosaeder.
- Gelb markiert sind die 15 Möglichkeiten, mit den elf dargestellten Ikosaederecken einen langen Pflasterstein, ausgehend von seiner spitzen Ecke, zu bilden, vgl. Abbildung 3.23.
- Gewissermaßen in der Mitte der drei rot markierten übernächsten Ikosaederecken liegen drei paarweise direkte Nachbarn im Ikosaeder. Folglich umschließt der Aufspann der rot markierten Ecken gerade diese drei Ikosaederecken. Die gelb untermalten Dreiecke sind daher genau die vier Kombinationsmöglichkeiten von drei paarweise benachbarten Einheitsvektoren, die einen langen Pflasterstein aufspannen, welcher ganz im Inneren des groben flachen Steins liegt.
- Weil in obiger Zeichnung die Verbindung zwischen zwei benachbarten Ikosaederecken gerade der Raute, welche von eben diesen beiden Ikosaederecken im Raum aufgespannt wird, entspricht, können wir für die mit 1 bis 6 gekennzeichneten Kombinationsmöglichkeiten aus obiger Abbildung entnehmen: Eine Raute liegt jeweils ganz im Inneren des von den rot markierten Ecken aufgespannten groben flachen Steins, eine Raute liegt jeweils gerade zur Hälfte in eben diesem Stein und eine Raute liegt stets außerhalb dieses flachen Steins. Folglich bilden die genannten Kombinationen gerade lange Pflastersteine, welche jeweils zur Hälfte im Inneren des groben flachen Pflastersteins liegen.

□

3. Deflation im Fall von Penrose 3D

Allerdings ist Vorsicht angebracht: Der flache Stein ist – wie sein Name schon sagt – relativ flach und somit ist genau zu prüfen, ob wirklich von beiden gegenüberliegenden stumpfen Ecken des groben flachen Steins aus je vier ganze und sechs halbe lange Pflastersteine ins Innere dieses Steins ragen oder ob sich die gegenüberliegenden Ecken nicht einen oder mehrere Pflastersteine teilen!

Beobachtung 3.15. *Die beiden gegenüberliegenden stumpfen Ecken des groben flachen Steins sind im feinen Muster SM_E durch einen langen Stein verbunden.*

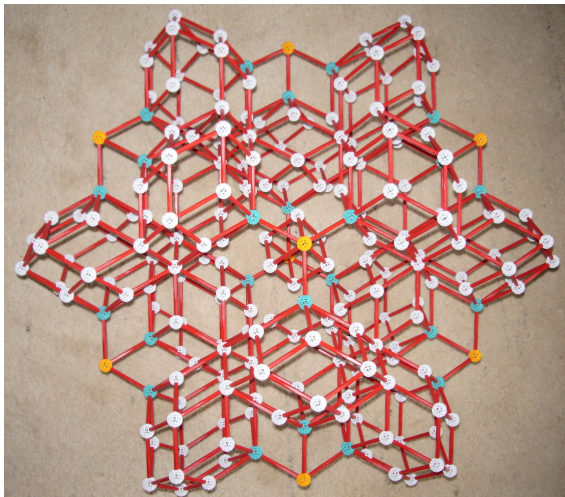
Beweis. Nach den Berechnungen in A.2 und unter Berücksichtigung der definierenden Gleichheit $\Phi^2 = \Phi + 1$ des Goldenen Schnitts gilt:

$$\frac{\text{lange Diagonale langer Stein}}{\text{kurze Diagonale flacher Stein}} = \frac{(\Phi + 1)\sqrt{3}}{(\Phi - 1)\sqrt{3}} = \Phi^3,$$

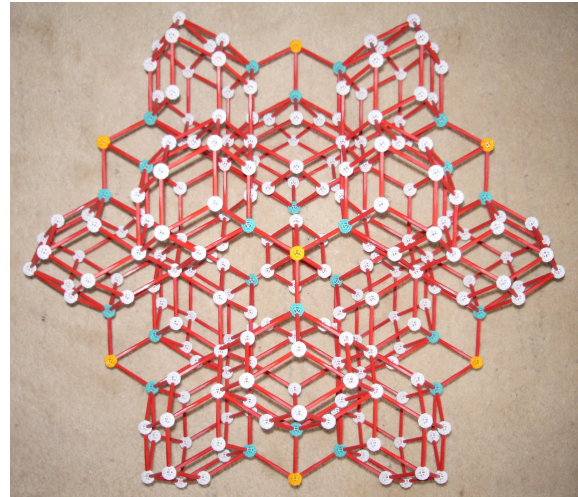
denn $\Phi + 1 = \Phi^2 = \Phi(\Phi^2 - 1) = \Phi(\Phi + 1)(\Phi - 1) = \Phi^3(\Phi - 1)$.

Da nun der Deflationsfaktor im Fall des dreidimensionalen Penrose-Musters ebenfalls Φ^3 ist, entspricht die Länge einer kurzen Diagonale des groben flachen Steins genau der Länge einer langen Diagonale des feinen langen Steins. Nach Beobachtung 3.12 liegen um jede alte Ecke im feinen Muster SM_E 20 lange Steine an und daher sind die beiden gegenüberliegenden stumpfen Ecken des groben flachen Steins im feinen Muster SM_E auch tatsächlich gerade durch einen langen Stein verbunden. \square

Bemerkung. Dieser lange Stein des feinen Musters SM_E soll im Folgenden *Querstein* genannt werden. Von den beiden gegenüberliegenden stumpfen Ecken des groben flachen Steins aus ragen folglich insgesamt $2 \cdot (4 + 6 \cdot \frac{1}{2}) - 1 = 13$ lange Pflastersteine ins Innere des groben flachen Steins.



(a) Perspektivische Ansicht



(b) Draufsicht

Abbildung 3.26.: Die beiden gegenüberliegenden stumpfen Ecken des groben flachen Steins sind im Muster SM_E durch einen langen Pflasterstein, genannt Querstein, verbunden.

Nun ist zu klären: Ist die Lücke im Inneren des flachen Steins damit ausgefüllt oder existieren an dieser Stelle noch weitere Steine? Betrachten wir hierzu eine der beiden stumpfen Ecken, genauer gesagt die hintere stumpfe Ecke des groben flachen Steins, und halten die bisherigen Ergebnisse in einem Prinzipbild fest, vgl. die Abbildungen 3.22 und 3.24.

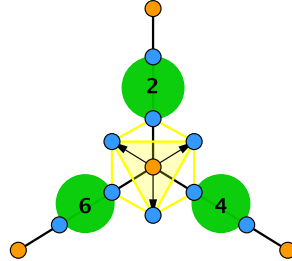


Abbildung 3.27.: Die hintere stumpfe Ecke des groben flachen Steins samt ihrer Unterteilung: Gelb eingezeichnet sind die vier langen Pflastersteine des feinen Musters SM_E , welche von der gewählten Ecke aus ganz im Inneren des groben flachen Steins liegen.

Bemerkungen zu Abbildung 3.27:

- Von den vier langen Pflastersteinen des feinen Musters SM_E , die von der gewählten stumpfen Ecke des groben flachen Steins aus im Inneren dieses Steins liegen, liegt je ein langer Pflasterstein in Richtung der Kanten mit den Linsen 2 und 4 sowie 6.
- Der vierte lange Pflasterstein ist gerade der Querstein. In obiger Abbildung ist das der gelb untermalte Stein.
- Anschließend an die drei langen Pflastersteine in Richtung der Linsen folgen dann schon die Linsen selbst – dies bedeutet, dass es an diesen Stellen keine Lücken mehr gibt, die gefüllt werden müssen, vgl. insbesondere Abbildung 3.20.

Dieselbe Überlegung gilt nun aber auch für die gegenüberliegende stumpfe Ecke des groben flachen Steins bezüglich der Linsen 1 und 3 sowie 5, und damit erhalten wir insgesamt die folgende Situation:

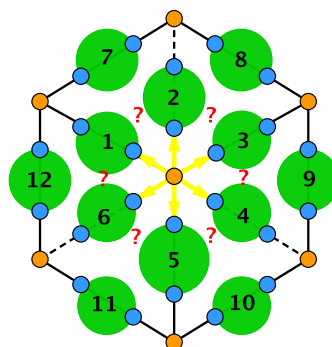


Abbildung 3.28.: Die gelben Pfeile machen deutlich, dass von den beiden stumpfen Ecken des groben flachen Steins aus jeweils ein langer Pflasterstein des Musters SM_E in Richtung der Linsen 1 bis 6 liegt.

3. Deflation im Fall von Penrose 3D

In Richtung der Linsen 1 bis 6 gibt es folglich keine Lücken mehr, doch was passiert *zwischen* den einzelnen Linsen: Gibt es hier noch Lücken zu füllen? Dazu müssen wir uns ansehen, wie die Linsen im flachen Stein untereinander verbunden sind, siehe Abbildung 3.29. Beispielsweise können wir fragen: Wie hängt Linse 7 mit ihren beiden Nachbarlinsen, Linse 1 und Linse 2, zusammen? Wir sehen: Linse 7 teilt mit diesen

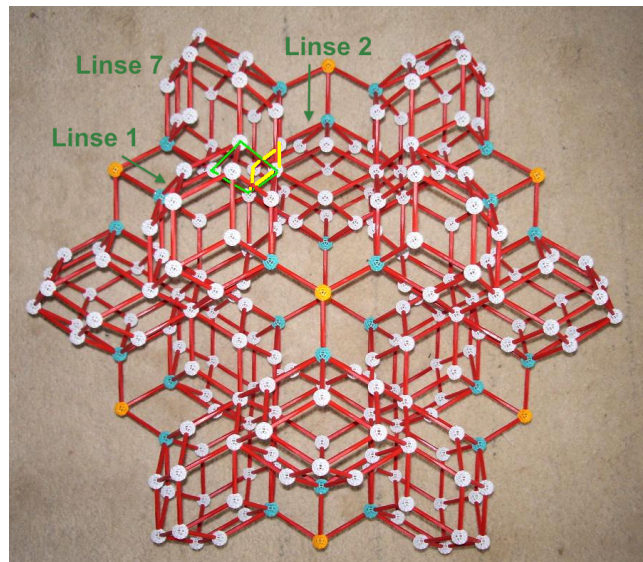


Abbildung 3.29.: Die Linsen im flachen Pflasterstein sind nicht disjunkt.

beiden Linsen je eine Raute, grün und gelb in obiger Abbildung markiert. Diese beiden Rauten sind nun aber gerade benachbarte Rauten, was wiederum bedeutet, dass Linse 1 und Linse 2 eine gemeinsame Kante besitzen.

Insgesamt können wir Prinzipbild 3.28 damit ergänzen: Gelb gekennzeichnet sind wieder die langen Pflastersteine im Inneren des groben flachen Steins in Richtung der Linsen 1 bis 6. Der Buchstabe *K* bedeutet, dass die entsprechenden Linsen eine Kante gemeinsam haben und der Buchstabe *R* demzufolge, dass die entsprechenden Linsen eine Raute teilen:

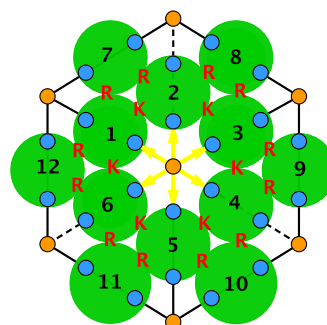


Abbildung 3.30.: Der Schnitt der Linsen im flachen Stein

3.5. Die Festlegung auf einen Pflasterstein

Dies führt zu der folgenden Beobachtung:

Beobachtung 3.16. *Die inneren Linsen des groben flachen Steins sind im feinen Muster SM_E untereinander jeweils durch einen flachen Stein verbunden.*

Beweis. Kehren wir noch einmal zu Abbildung 3.26 zurück und betrachten exemplarisch Linse 1 und Linse 2. Wir sehen dort bereits ein Teilstück des flachen Steins, den die beiden Linsen zusammen einschließen:

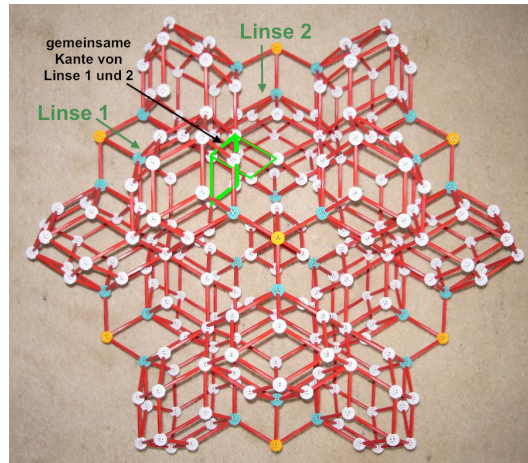


Abbildung 3.31.: Linse 1 und Linse 2 im groben flachen Stein

Vervollständigt man diesen flachen Stein, so erhält man die folgende Situation:

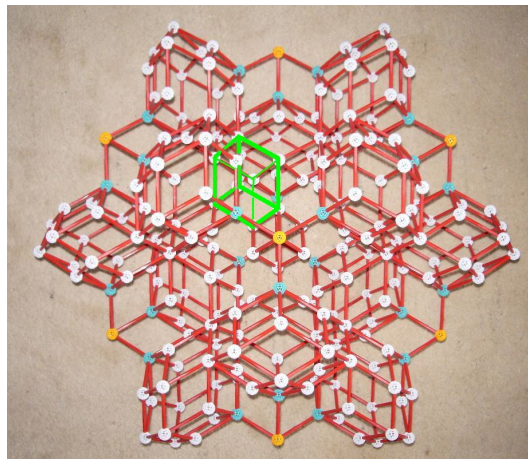


Abbildung 3.32.: Der flache Stein, den die Linsen 1 und 2 im feinen Muster SM_E einschließen

□

Bezüglich der Frage, was im Inneren des groben flachen Steins geschieht, sind wir damit am Ziel der Überlegung angelangt: Wir wussten bereits, was in Richtung der Linsen 1 bis 6 passiert. Mit Beobachtung 3.16 ist nun zusätzlich bekannt, was zwischen diesen

3. Deflation im Fall von Penrose 3D

Linsen geschieht. Damit ist die Lücke im Inneren des groben flachen Steins vollständig geschlossen.

Beobachtung 3.17. *Die Lücke im Inneren des groben flachen Steins wird im feinen Muster SM_E mit insgesamt 13 langen und 6 flachen Pflastersteinen gefüllt.*

Beweis. Nach der Bemerkung auf Seite 98 existieren im Inneren des groben flachen Steins insgesamt 13 lange Pflastersteine des feinen Musters SM_E .³⁶ Da der grobe flache Stein sechs innere Linsen besitzt, folgt zudem mit Beobachtung 3.16, dass noch genau sechs flache Steine des feinen Musters SM_E im Inneren dieses Steins liegen. \square

Abbildung 3.33 fasst noch einmal die Ergebnisse bezüglich der Lücke im Inneren des groben flachen Pflastersteins zusammen.

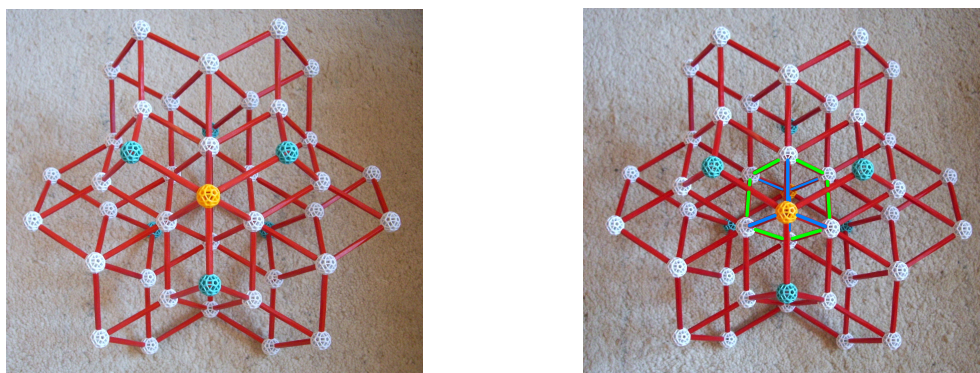


Abbildung 3.33.: Die Lücke im Inneren des groben flachen Pflastersteins losgelöst vom Rest des Steins: links in der direkten Draufsicht und rechts in der perspektivischen Ansicht

Bemerkungen zu Abbildung 3.33:

- Die gelben Punkte, sogenannte alte Ecken im feinen Muster SM_E , sind die beiden stumpfen Ecken des groben flachen Steins. Beide Punkte sind Eckpunkte des Quersteins. Im linken Bild fallen die beiden Punkte übereinander.
- Die blauen Punkte sind die Nachbarecken dieser alten Ecken im feinen Muster SM_E in Richtung der Kanten des groben flachen Steins.
- Der Querstein nimmt gewissermaßen eine Sonderrolle ein, denn alle Steine, welche nach Beobachtung 3.17 ganz oder auch nur halb im Inneren des groben flachen Steins liegen, sind mit diesem Stein verbunden:
 - Um die sechs blau markierten Kanten existieren neben dem Querstein jeweils noch vier lange Pflastersteine des feinen Musters SM_E . Die beiden langen Steine, welche an den Querstein direkt angrenzen, liegen dabei stets ganz im

³⁶Vorsicht vor Missverständnissen mit der Zahl 13: Es ragen nicht 13 lange Steine des feinen Musters SM_E komplett ins Innere des groben flachen Steins, sondern nur sieben. Daneben liegen zwölf weitere lange Steine jeweils zur Hälfte im Inneren des groben flachen Steins!

Inneren des groben flachen Steins. Diese Steine sehen wir in obiger Abbildung. Die beiden restlichen langen Steine liegen dagegen nur jeweils zur Hälfte im Inneren des groben flachen Steins. Der Übersicht halber fehlen sie in obiger Abbildung.³⁷

- Um die sechs grün markierten Kanten existieren neben dem Querstein jeweils zwei lange Pflastersteine sowie ein flacher Pflasterstein des feinen Musters SM_E . Diese Steine liegen allesamt ganz im Inneren des groben flachen Steins und wir sehen sie in obiger Abbildung. Die beiden langen Pflastersteine grenzen dabei stets an den Querstein an.

Die übrigen Ecken

An dieser Stelle soll geklärt werden, was an den restlichen Ecken, also an den bisher nicht betrachteten spitzen Ecken des groben flachen Steins, passiert: Wie viele der nach Beobachtung 3.12 existierenden 20 langen Pflastersteine des feinen Musters SM_E liegen dort jeweils auch tatsächlich im Inneren des groben flachen Steins?

Beobachtung 3.18. *An den sechs spitzen Ecken des groben flachen Pflastersteins liegen jeweils zwei halbe lange Pflastersteine des feinen Musters SM_E im Inneren des Steins.*

Beweis. Der Beweis verläuft analog zu dem von Beobachtung 3.14, mit dem Unterschied, dass nun natürlich die schematische Darstellung einer spitzen Ecke des flachen Steins in Abbildung 3.23 eingezeichnet werden muss.

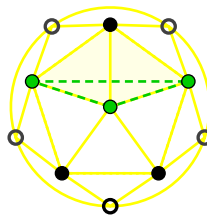


Abbildung 3.34.: Eine spitze Ecke des flachen Steins samt 15 der insgesamt 20 Möglichkeiten, mit den dargestellten Ikosaederecken einen langen Stein, ausgehend von einer spitzen Ecke, zu realisieren

Bemerkungen zu Abbildung 3.34:

- Grün markiert sind die drei Ikosaederecken, die eine spitze Ecke des flachen Steins bilden: Es sind zwei direkte Nachbarn und ein übernächster Nachbar im Ikosaeder.
- Gelb markiert sind wieder die 15 Möglichkeiten, mit den elf dargestellten Ikosaederecken einen langen Pflasterstein, ausgehend von seiner spitzen Ecke, zu bilden.

³⁷Die Nachbarecken der alten Ecken im feinen Muster SM_E sind bekanntlich Ecken des Typs ω_{6a} , sogenannte Blumenecken. Folglich sind die sechs restlichen Eckpunkte des Quersteins allesamt solche Blumenecken, und die blauen Kanten bilden stets den Stiel einer dieser sechs Blumenecken. Damit wissen wir, dass um die blauen Kanten fünf lange Pflastersteine existieren, vgl. Abbildung 3.16!

3. Deflation im Fall von Penrose 3D

- Der Aufspann der drei grün markierten Ikosaederecken umschließt keine weiteren Ikosaederecken. Bedenken wir aber wieder, dass in obiger Zeichnung die Verbindung zwischen zwei benachbarten Ikosaederecken gerade der Raute entspricht, die von eben diesen beiden Ikosaederecken im Raum aufgespannt wird, so ergibt sich für die beiden gelb untermalten Kombinationsmöglichkeiten: Eine Raute liegt jeweils ganz im Inneren des von den grün markierten Ecken aufgespannten flachen Steins, eine Raute liegt jeweils gerade zur Hälfte in eben diesem Stein und eine Raute liegt stets außerhalb dieses flachen Steins. Folglich bilden diese zwei Kombinationsmöglichkeiten gerade lange Pflastersteine, welche jeweils zur Hälfte im Inneren des groben flachen Pflastersteins liegen.

□

Bemerkung. Von den spitzen Ecken des groben flachen Steins aus ragen demnach insgesamt $6 \cdot (2 \cdot \frac{1}{2}) = 6$ lange Pflastersteine ins Innere des groben flachen Steins.

Die Füllung der Linsen

Wir wissen bereits, dass es zehn zueinander isomorphe Möglichkeiten gibt, eine Linse mit langen und flachen Pflastersteinen zu füllen, vgl. Beobachtung 3.13. Doch werden diese zehn theoretisch möglichen Füllungen auch bei jeder der zwölf Linsen realisiert? Diese Frage ist wegweisend, denn es ist letzten Endes die Entscheidung darüber, ob die Unterteilung des groben flachen Pflastersteins des Musters $M_{E'}$ durch Pflastersteine des feinen Musters SM_E eindeutig ist oder nicht: Alle bisherigen Ergebnisse³⁸ waren eindeutig und einzig und allein diese Frage nach der Füllung der Linse ist noch offen!

Um die Frage der Linsenfüllung zu klären, muss das bisherige Vorgehen weiter konkretisiert werden: Es ist an dieser Stelle nicht mehr ausreichend, nur ganz allgemein den langen und den flachen Pflasterstein zu unterscheiden. Vielmehr müssen wir nun auch festlegen, von welchen Einheitsrichtungen $\pm v_i$ mit $1 \leq i \leq 6$ der gewählte Stein im groben Muster $M_{E'}$ aufgespannt werden soll, und überlegen, welche Gebiete $\Omega_4, \dots, \Omega_{12}$ im Fenster V eben diesen Stein realisieren. Mit der Vereinigung all dieser Gebiete gilt es schließlich zu arbeiten: Es ist der Teil des Fensters V , der für die Unterteilung des von uns gewählten flachen Pflastersteins tatsächlich betrachtet werden muss!

O. B. d. A. nehmen wir im Folgenden an, dass der flache Pflasterstein im groben Muster $M_{E'}$ ausgehend von einer stumpfen Ecke von den Einheitsrichtungen $-v_3$ und $-v_5$ sowie $+v_6$ gebildet wird. Für alle $1 \leq i \leq 6$ bezeichnen wir die Einheitsrichtungen $\pm \varphi^3 v_i$ im feinen Muster SM_E wieder mit $\pm i$, vgl. Abbildung 3.11 sowie die Bemerkung auf Seite 83. Doch welche Gebiete im Fenster V realisieren nun genau diesen von uns gewählten flachen Pflasterstein?

³⁸Damit sind die Ergebnisse bezüglich der Lücke im Inneren des flachen Steins sowie der Eckenumgebung der spitzen Ecke des flachen Steins gemeint. Der erste und der zweite Deflationszug sowie die Linsen sind bekanntlich sogar global gültige Ergebnisse.

3.5. Die Festlegung auf einen Pflasterstein

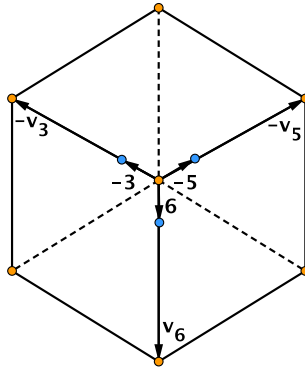


Abbildung 3.35.: Der grobe flache Stein im Muster $M_{E'}$, aufgespannt von den Vektoren $-v_3$ und $-v_5$ sowie $+v_6$, samt den entsprechenden Einheitsrichtungen im feinen Muster SM_E

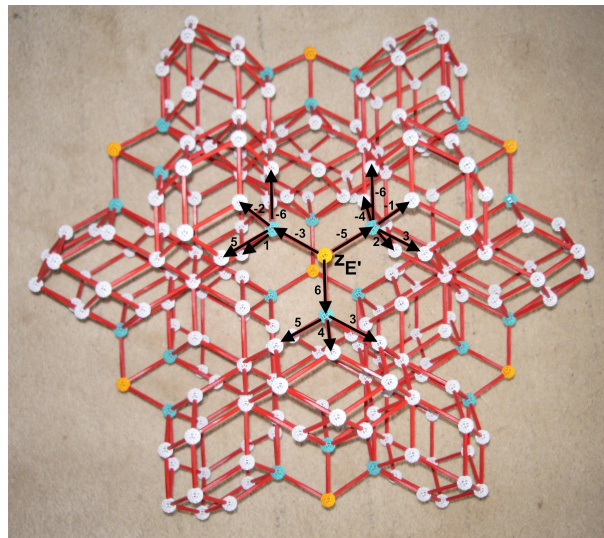


Abbildung 3.36.: Diese Koordinaten ergeben sich für das feine Muster SM_E .

Beobachtung 3.19. Die Vereinigung V_F aller Gebiete, die den flachen Pflasterstein ausgehend von einer stumpfen Ecke mit den Einheitsrichtungen $-v_3$ und $-v_5$ sowie $+v_6$ realisieren, hat selbst die Gestalt eines flachen Pflastersteins.

Beweis. Die gesuchten Gebiete des Fensters V im Hilfsraum F haben die folgenden drei Bedingungen zu erfüllen:

1. Die Einheitsrichtungen $-w_3$ und $-w_5$ sowie $+w_6$ müssen erlaubt sein.
2. Die Einheitsrichtungen $+w_1$ und $+w_2$ sowie $-w_4$ dürfen nicht existieren.
3. Die Verschiebung dieser Gebiete im Hilfsraum F in Richtung $-w_3$ und $-w_5$ sowie $+w_6$ und $-w_3 + w_6$ sowie $-w_5 + w_6$ und $-w_3 - w_5$ sowie $-w_3 - w_5 + w_6$ muss ebenfalls wieder im Fenster V liegen.

3. Deflation im Fall von Penrose 3D

Bedingung 1 gilt, weil der flache Pflasterstein von den drei Einheitsrichtungen $-v_3$ und $-v_5$ sowie $+v_6$ aufgespannt werden soll. Da die Gebiete Teil des Hilfsraums F sind, müssen folglich in den Gebieten, welche diesen Pflasterstein realisieren sollen, gerade die Einheitsrichtungen $-w_3$ und $-w_5$ sowie $+w_6$ existieren.

Bedingung 2 ergibt sich daraus, dass der flache Stein ausgehend von einer stumpfen Ecke betrachtet wird. Folglich dürfen die drei Einheitsrichtungen, die von den paarweise übernächsten Ikosaedernachbarn $-v_3$ und $-v_5$ sowie $+v_6$ eingeschlossen werden und damit ins Innere des flachen Pflastersteins zeigen, gerade nicht existieren. Nach der Wahl unserer Koordinaten sind das die drei paarweise benachbarten Ikosaederecken $+v_1$ und $+v_2$ sowie $-v_4$. Folglich müssen im Hilfsraum F gerade die Einheitsrichtungen $+w_1$ und $+w_2$ sowie $-w_4$ verboten sein.

Bedingung 3 ist abhängig von der gewählten Ausgangsecke. Wir gehen dabei im Folgenden von der in Abbildung 3.36 mit $z_{E'}$ bezeichneten vorderen stumpfen Ecke des groben flachen Steins aus. Damit sind die restlichen sieben Eckpunkte dieses Steins die Punkte $z_{E'} - v_3$ und $z_{E'} - v_5$ sowie $z_{E'} + v_6$ und $z_{E'} - v_3 + v_6$ sowie $z_{E'} - v_5 + v_6$ und $z_{E'} - v_3 - v_5$ sowie $z_{E'} - v_3 - v_5 + v_6$. Liegt nun der zu $z_{E'}$ gehörige Projektionspunkt $z_{F'}$ in einem bestimmten Gebiet des Fensters V , welches die Bedingungen 1 und 2 erfüllt, so müssen demnach auch die Verschiebungen dieses Gebiets im Hilfsraum F in Richtung $-w_3$ und $-w_5$ sowie $+w_6$ und $-w_3 + w_6$ sowie $-w_5 + w_6$ und $-w_3 - w_5$ sowie $-w_3 - w_5 + w_6$ im Fenster V liegen! Anderenfalls existieren wegen Äquivalenz-Kriterium 2.1 die oben genannten Eckpunkte überhaupt nicht und folglich kann der flache Stein von dem gewählten Gebiet auch nicht realisiert werden.

Bemerkung. Bedingung 3 ist nötig, da die Kenntnis eines bestimmten Eckentyps nicht eindeutig festlegt, welche Pflastersteine bzw. auf welche Art und Weise die Pflastersteine an dieser Ecke anliegen, vgl. 2.2.3. Mit anderen Worten: Auch wenn eine bestimmte Ecke theoretisch den von uns gewählten flachen Pflasterstein realisieren kann, muss diese Ecke das praktisch nicht zwingend tun!

Ferner kann diese letzte Bedingung auch nur für einen bestimmten Teil eines Gebiets, für welches die Bedingungen 1 und 2 gelten, erfüllt sein. Das bedeutet dann, dass eben nur dieser Teil den gewählten Pflasterstein auch tatsächlich realisiert.

Das in Abbildung 3.37 dargestellte Teilgebiet V_F des Fensters V erfüllt nun gerade die Bedingungen 1 bis 3 und realisiert damit ausgehend von einer stumpfen Ecke den flachen Pflasterstein mit den Einheitsrichtungen $-v_3$ und $-v_5$ sowie $+v_6$. Das Gebiet V_F hat dabei selbst die Gestalt eines flachen Pflastersteins.

Die Bedingungen 1 und 2 können wir nachprüfen, indem wir mit Hilfe des Analogieprinzips A.6 die in den abgebildeten Gebieten jeweils erlaubten Einheitsrichtungen $\pm w_i$ mit $1 \leq i \leq 6$ ermitteln, siehe dazu Tabelle 3.3. Beachte, dass die drei abgebildeten Fenster-rauten jeweils auf der Ebene des Typs \mathcal{A} liegen, d. h. $R_{(3,5)} \subset A^{(3,5)}$ und $R_{(3,-6)} \subset A^{(3,-6)}$ sowie $R_{(5,-6)} \subset A^{(5,-6)}$. Die restlichen drei Begrenzungsflächen von V_F liegen allesamt auf Ebenen des Typs \mathcal{E}_{2+} , für die Farbwahl der einzelnen Gebietstypen siehe Tabelle 2.2.

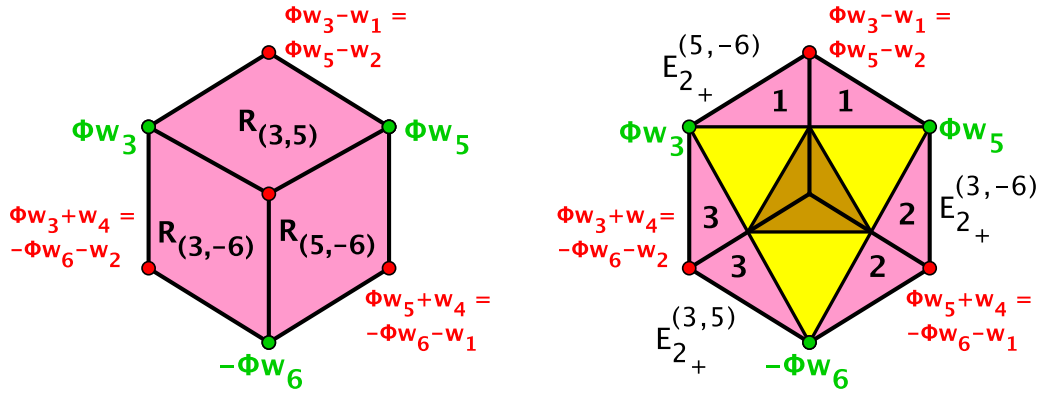


Abbildung 3.37.: Links die Oberseite und rechts die Unterseite des Gebiets V_F . Für die Dodekaederecken sind jeweils nur zwei der drei formal möglichen Schreibweisen angegeben, diese werden im Folgenden benötigt.

Ebene	Gebiet	Einheitsrichtungen
$A^{(3,5)}$	Ω_4	$-w_3, +w_4, -w_5, +w_6$
$A^{(3,-6)}$	Ω_4	$-w_1, -w_3, -w_5, +w_6$
$A^{(5,-6)}$	Ω_4	$-w_2, -w_3, -w_5, +w_6$
$E_{2+}^{(5,-6)}$	$\Omega_4, 1$	$-w_3, +w_4, -w_5, +w_6$
$E_{2+}^{(5,-6)}$	$\Omega_4, 3$	$-w_1, -w_3, -w_5, +w_6$
$E_{2+}^{(5,-6)}$	Ω_5	$-w_1, -w_3, +w_4, -w_5, +w_6$
$E_{2+}^{(5,-6)}$	Ω_{6b}	$-w_1, -w_2, -w_3, +w_4, -w_5, +w_6$
$E_{2+}^{(3,-6)}$	$\Omega_4, 1$	$-w_3, +w_4, -w_5, +w_6$
$E_{2+}^{(3,-6)}$	$\Omega_4, 2$	$-w_2, -w_3, -w_5, +w_6$
$E_{2+}^{(3,-6)}$	Ω_5	$-w_2, -w_3, +w_4, -w_5, +w_6$
$E_{2+}^{(3,-6)}$	Ω_{6b}	$-w_1, -w_2, -w_3, +w_4, -w_5, +w_6$
$E_{2+}^{(3,5)}$	$\Omega_4, 2$	$-w_2, -w_3, -w_5, +w_6$
$E_{2+}^{(3,5)}$	$\Omega_4, 3$	$-w_1, -w_3, -w_5, +w_6$
$E_{2+}^{(3,5)}$	Ω_5	$-w_1, -w_2, -w_3, -w_5, +w_6$
$E_{2+}^{(3,5)}$	Ω_{6b}	$-w_1, -w_2, -w_3, +w_4, -w_5, +w_6$

Tabelle 3.3.: Die in den einzelnen Gebieten erlaubten Einheitsrichtungen $\pm w_i$ mit $1 \leq i \leq 6$

Ein Vergleich der jeweils erlaubten Einheitsrichtungen $\pm w_i$ mit $1 \leq i \leq 6$ zeigt, dass alle in Tabelle 3.3 aufgeführten Gebiete die Bedingungen 1 und 2 erfüllen. Damit gibt es in V_F insgesamt drei Gebiete des Typs Ω_4 und Ω_5 sowie ein Gebiet des Typs Ω_{6b} , welche theoretisch den von uns gewählten flachen Pflasterstein realisieren können. Ob sie dies tatsächlich tun, wird Bedingung 3 klären! Bezüglich der Gebiete innerhalb von V_F gilt:

3. Deflation im Fall von Penrose 3D

Hilfsbeobachtung 4. Die in Tabelle 3.3 ermittelten Gebiete des Typs Ω_4 und Ω_5 sowie Ω_{6b} liegen allesamt vollständig in V_F . Daneben gibt es keine weiteren Gebiete in V_F .

Beweis. Die Ebenen $E_{2+}^{(3,5)}$ und $E_{2+}^{(3,-6)}$ sowie $E_{2+}^{(5,-6)}$ sind Ebenen des Typs \mathcal{E}_{2+} und damit sogenannte Schnittebenen, vgl. 2.2.2. Ein Vergleich mit der Gebietsenteilung auf der Ebene des Typs \mathcal{E}_{2-} , vgl. Seite 61, zeigt: Für die in Bezug auf V_F relevanten Gebiete spielt die Fallunterscheidung in die Ebenentypen \mathcal{E}_{2+} und \mathcal{E}_{2-} sehr wohl eine Rolle, denn für diese Gebiete kommt im letzteren Fall jeweils noch eine weitere Einheitsrichtung $\pm w_i$ mit $1 \leq i \leq 6$ hinzu.

Damit existieren auf den Ebenen $E_{2-}^{(3,5)}$ und $E_{2-}^{(3,-6)}$ sowie $E_{2-}^{(5,-6)}$ die in Tabelle 3.3 genannten Gebiete gerade nicht mehr und folglich liegen diese Gebiete allesamt ganz in V_F . Da in Abbildung 3.37 die Gebiete des Typs Ω_4 sowohl auf den Gebietsbildern der Oberseite von V_F als auch auf denen der Unterseite von V_F existieren, kann es nach Konstruktion des Fensters V auch keine weiteren Gebiete mehr in V_F geben. \square

Bemerkung. Diese Hilfsbeobachtung ist für den Beweis nicht zwingend notwendig, gibt aber einen schönen Überblick darüber, wie man sich die Gebiete in V_F vorzustellen hat. Wirklich entscheidend ist für uns allein die Tatsache, dass auch alle Gebiete in V_F die Bedingungen 1 und 2 erfüllen. Ob diese nun ganz oder nur teilweise in V_F liegen, ist nebensächlich, da wir im Folgenden stets V_F als Ganzes betrachten und nicht nur einzelne Gebiete daraus!

Bedingung 3 kann wie folgt gezeigt werden: In Abbildung 3.37 werden sechs der acht Ecken des Gebiets V_F genannt. Der noch fehlende Eckpunkt der Oberseite von V_F ist

$$\Phi w_3 + w_2 = \Phi w_5 + w_1 = -\Phi w_6 - w_4$$

und der noch fehlende Eckpunkt der Unterseite von V_F ist

$$\Phi w_3 - w_1 + w_4 = \Phi w_5 - w_2 + w_4 = -\Phi w_6 - w_1 - w_2.$$

Mit Hilfe der Überlegungen bezüglich der Beobachtungen 1.12 und 1.14 sowie 1.15 lässt sich die Verschiebung von V_F in die unterschiedlichen Einheitsrichtungen $\pm w_i$ mit $1 \leq i \leq 6$ somit berechnen. Wirklich interessant ist dabei allein die Verschiebung L in Richtung der Einheitsvektoren $-w_3 - w_5 + w_6$, denn sie zeigt gerade, warum V_F selbst die Gestalt eines flachen Pflastersteins haben muss!³⁹

³⁹Die Verschiebung in alle übrigen Kombinationen von Einheitsrichtungen, wie in Bedingung 3 formuliert, liegt stets innerhalb des Fensters V . Die notwendige Überprüfung verläuft analog zu dem hier gezeigten Fall.

Im Folgenden soll daher diese Verschiebung exemplarisch berechnet werden. Es gilt:

$$\begin{aligned}
 L(\Phi w_3) &= \Phi w_3 - w_3 - w_5 + w_6 \\
 &= \frac{1}{2} \left(w_3 + \sum \text{Nachbarecken } (w_3) - 2w_3 - 2w_5 + 2w_6 \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(w_3 + \underbrace{(w_1 - w_2 - w_4 + w_5 - w_6)}_{\text{Nachbarecken von } +w_3} - 2w_3 - 2w_5 + 2w_6 \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(-w_5 + \underbrace{(w_1 - w_2 - w_3 - w_4 + w_6)}_{\text{Nachbarecken von } -w_5} - 2w_4 \right) = -\Phi w_5 - w_4,
 \end{aligned}$$

was bedeutet, dass der Eckpunkt Φw_3 unter L gerade auf den Eckpunkt $-\Phi w_5 - w_4$ des Fensters V verschoben wird. Für diesen Eckpunkt gilt nach Tabelle 1.1 die Gleichheit

$$-\Phi w_5 - w_4 = \Phi w_6 + w_1 = -\Phi w_2 - w_3$$

und damit erhalten wir für die Translation der restlichen sieben Eckpunkte von V_F :

$$\begin{aligned}
 L(\Phi w_3 - w_1) &= L(\Phi w_3) - w_1 \\
 &= (\Phi w_6 + w_1) - w_1 = \Phi w_6
 \end{aligned}$$

und deshalb

$$\begin{aligned}
 L(\Phi w_5) &= L(\Phi w_3 - w_1 + w_2) \\
 &= L(\Phi w_3) - w_1 + w_2 = \Phi w_6 + w_2
 \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
 L(\Phi w_3 + w_4) &= L(\Phi w_3) + w_4 \\
 &= (-\Phi w_5 - w_4) + w_4 = -\Phi w_5.
 \end{aligned}$$

Analog dazu gilt schließlich

$$L(-\Phi w_6) = -\Phi w_5 + w_2 \quad \text{und} \quad L(-\Phi w_6 - w_1) = -\Phi w_3$$

sowie

$$L(\Phi w_3 + w_2) = -\Phi w_5 + w_2 - w_4 \quad \text{und} \quad L(\Phi w_3 + w_4 - w_1) = -\Phi w_5 - w_1.$$

Das bedeutet, dass die insgesamt acht Eckpunkte von V_F unter der Verschiebung L in Richtung $-w_3 - w_5 + w_6$ gerade auf die acht zu diesen Ecken antipodalen Punkte im Fenster V abgebildet werden. Genauer:

- Die Verschiebung der drei Begrenzungsflächen auf den Ebenen des Typs \mathcal{E}_{2+} , welche die Unterseite von V_F bilden, ergibt genau die drei benachbarten Fensterrauten $R_{(-3,-5)}$ und $R_{(-3,6)}$ sowie $R_{(-5,6)}$ und liegt damit auf dem Rand des Fensters V .

3. Deflation im Fall von Penrose 3D

- Die Verschiebung der Fensterrauten $R_{(3,5)}$ und $R_{(3,-6)}$ sowie $R_{(5,-6)}$, welche die Oberseite von V_F bilden, liegt dagegen im Inneren des Fensters V .

Somit ist klar, dass V_F maximal die Gestalt eines flachen Pflastersteins besitzen kann, denn wäre V_F größer, dann läge die Verschiebung von V_F in Richtung $-w_3 - w_5 + w_6$ nicht mehr im Fenster V , was im Widerspruch zu Bedingung 3 steht! \square

Die Frage, die sich damit stellt, lautet: Erreicht man mit dieser Einschränkung V_F des Fensters V für den dritten Deflationszug ein eindeutiges Ergebnis in dem Sinn, dass auch im dritten Zug nur ein ganz bestimmter Eckentyp erlaubt ist? In 3.3 ist bereits klar geworden, dass es ein global eindeutiges Ergebnis, also ein Ergebnis, das sowohl für den flachen als auch für den langen Pflasterstein Gültigkeit besitzt, nicht geben kann. Doch wie sieht es aus, betrachtet man allein den flachen Stein?

Wenden wir dazu die Überlegungen bezüglich des ersten, zweiten und dritten Deflationszugs nicht mehr auf das gesamte Fenster V sondern allein auf das gerade ermittelte Gebiet V_F an. Der Punkt $z_{E'}$ bezeichnet dabei wieder die von uns festgelegte Ausgangsecke, d. h. die in Abbildung 3.36 markierte vordere stumpfe Ecke des groben flachen Steins. Wollen wir also beispielsweise wissen, welches der Eckentyp des Punktes $z_{E'} - \varphi^3 v_3 + \varphi^3 v_1$ im feinen Muster SM_E ist, so können wir mit Hilfe von Beobachtung 3.1 fragen:

Welchen Eckentyp ω_j mit $j = 4, 5, 6_a, 6_b, 7, 8, 9, 10, 12$ besitzt der Punkt $z_E + v_3 - v_1$ mit $z_F \in \varphi^3 V_F$ in dem zu SM_E ähnlichen Muster M_E ?

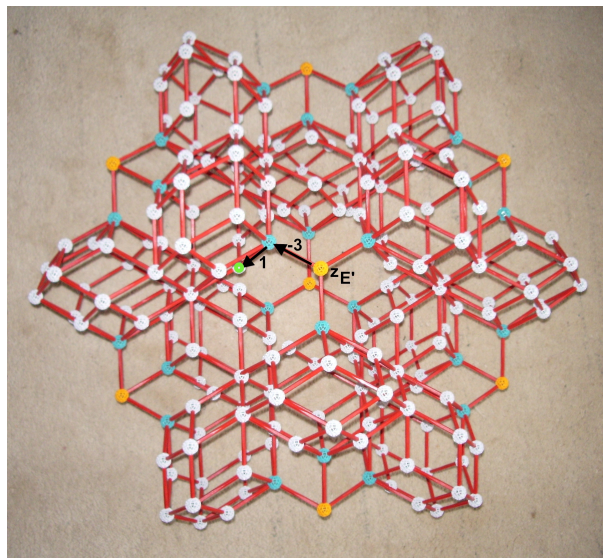


Abbildung 3.38.: Welchen Eckentyp besitzt der grün markierte Punkt $z_{E'} - \varphi^3 v_3 + \varphi^3 v_1$ des feinen Musters SM_E ? Nach der Terminologie auf Seite 90 handelt es sich hier um einen sogenannten zweiten Nachbarn.

Daraus ergibt sich die folgende Vorgehensweise:

1. Verschiebung des um den Faktor φ^3 verkleinerten Gebiets V_F in Richtung $+w_3 - w_1$
2. Überprüfung, welche Gebiete $\Omega_4, \dots, \Omega_{12}$ im Fenster V von der genannten Verschiebung überlagert werden. Dies sind die möglichen Eckentypen, die der Punkt $z_E + v_3 - v_1$ mit $z_F \in \varphi^3 V_F$ im Muster M_E annehmen kann.
3. Übertragung der Ergebnisse auf das Muster SM_E durch Anwendung von S

Beobachtung 3.20. *Der dritte Deflationszug ist auch für den flachen Pflasterstein für sich betrachtet nicht eindeutig.*

Beweis. Gemäß dem gerade beschriebenen Vorgehen soll der Eckentyp des Punktes $z_{E'} - \varphi^3 v_3 + \varphi^3 v_1$ im feinen Muster SM_E bestimmt werden. Mit Hilfe der bekannten Komponentenzerlegung der Einheitsrichtungen $\pm w_i$ mit $1 \leq i \leq 6$ in ihre jeweilige Lateral- und Höhenkomponente, vgl. A.3, können die Ebenen, auf denen die Verschiebungen der sechs Begrenzungsflächen des um φ^3 verkleinerten Gebiets V_F jeweils liegen, ermittelt werden.

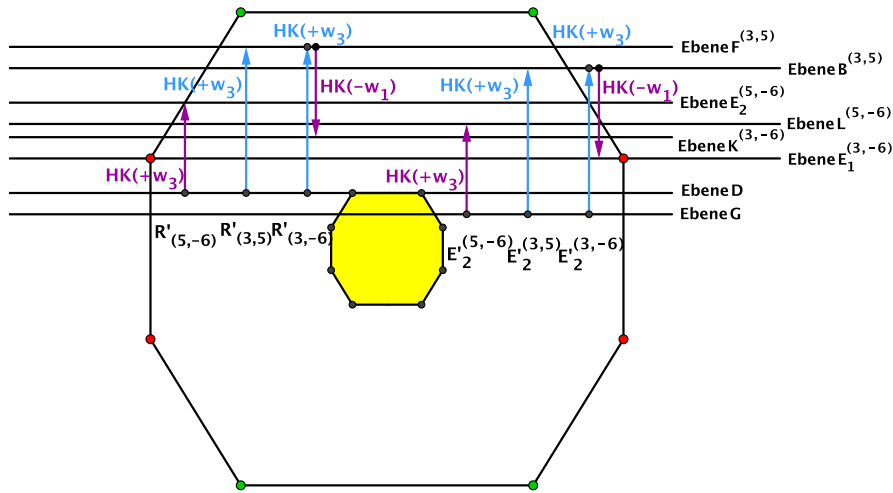


Abbildung 3.39.: Auf diesen Ebenen liegt die Verschiebung der Begrenzungsflächen von $\varphi^3 V_F$ in Richtung $+w_3 - w_1$.

Bemerkungen zu Abbildung 3.39:

- Im Unterschied zu den vorherigen Bildern wird hier die Verschiebung verschiedener Rauten bzw. Begrenzungsflächen in einem einzigen Bild ermittelt.
- Drei der insgesamt sechs Begrenzungsflächen des um den Faktor φ^3 verkleinerten Gebiets V_F sind die verkleinerten Fensterrauten $R'_{(5,-6)}$ auf der Ebene $D^{(5,-6)}$ und $R'_{(3,5)}$ auf der Ebene $D^{(3,5)}$ sowie $R'_{(3,-6)}$ auf der Ebene $D^{(3,-6)}$.

3. Deflation im Fall von Penrose 3D

- Die restlichen drei Begrenzungsflächen des um φ^3 verkleinerten Gebiets V_F bezeichnen wir, entsprechend den Rauten, mit $E_2'^{(5,-6)}$ und $E_2'^{(3,5)}$ sowie $E_2'^{(3,-6)}$. Diese Begrenzungsflächen liegen allesamt auf Ebenen des Typs \mathcal{G} .
- Bezüglich der beiden Begrenzungsflächen $R'_{(5,-6)}$ und $E_2'^{(5,-6)}$ liegt die Einheitsrichtung $-w_1$ ganz in der Zeichenebene. Die Höhenkomponente von $+w_3$ ist lila eingezeichnet.
- Bezüglich der beiden Begrenzungsflächen $R'_{(3,5)}$ und $E_2'^{(3,5)}$ liegt die Einheitsrichtung $-w_1$ ebenfalls ganz in der Zeichenebene. Die Höhenkomponente von $+w_3$ ist blau eingezeichnet.
- Bezüglich der beiden Begrenzungsflächen $R'_{(3,-6)}$ und $E_2'^{(3,-6)}$ liegt keine der Einheitsrichtungen ganz in der Zeichenebene. Die Höhenkomponente von $+w_3$ ist blau eingezeichnet, die Höhenkomponente von $-w_1$ lila.
- Auf welchen Ebenen im Detail die Verschiebungen der einzelnen Begrenzungsflächen liegen, kann direkt aus der Abbildung abgelesen werden. Wir lernen dabei zwei neue Ebenentypen kennen: die Ebenen des Typs \mathcal{K} und \mathcal{L} .

In einem zweiten Schritt kann dann durch Abtragen der entsprechenden Lateralkomponenten der Einheitsrichtungen $+w_3$ und $-w_1$ die genaue Lage der in Richtung $+w_3 - w_1$ verschobenen Begrenzungsflächen des um φ^3 verkleinerten Gebiets V_F auf den in Abbildung 3.39 genannten Ebenen ermittelt werden. Ein Vergleich mit der Gebietseinteilung auf diesen Ebenen zeigt schließlich, welche Gebiete von diesen Verschiebungen überlagert werden. Damit wissen wir, welchen Eckentyp der Punkt $z_{E'} - \varphi^3 v_3 + \varphi^3 v_1$ im feinen Muster SM_E tatsächlich annehmen kann.⁴⁰ Exemplarisch soll dieses Vorgehen für die verkleinerte Fensterraute $R'_{(5,-6)}$ gezeigt werden, siehe Abbildung 3.40.⁴¹

Konstruktion für die Raute $R'_{(5,-6)}$:

1. Die Verschiebung dieser Begrenzungsfläche in Richtung $+w_3 - w_1$ liegt auf der Ebene $E_2'^{(5,-6)}$, genauer auf der Ebene $E_{2-}'^{(5,-6)}$, denn das Gebiet V_F liegt unterhalb der Raute $R'_{(5,-6)}$.
2. Das Abtragen der Lateralkomponente von $-w_1$ sowie der ganz in der Zeichenebene liegenden Einheitsrichtung $+w_3$ ergibt schließlich die genaue Lage der um $+w_3 - w_1$ verschobenen Begrenzungsfläche $R'_{(5,-6)}$ auf dieser Ebene.
3. Ein Vergleich mit der Gebietseinteilung der Ebene des Typs \mathcal{E}_2 zeigt, dass die um $+w_3 - w_1$ verschobene Raute $R'_{(5,-6)}$ auf der Ebene $E_{2-}'^{(5,-6)}$ zwei Gebiete überlagert: ein Gebiet des Typs Ω_4 (rosa) sowie ein Gebiet des Typs Ω_5 (gelb).

⁴⁰Wir fragen momentan allein nach den Eckentypen und daher muss S nicht angewandt werden!

⁴¹Das Vorgehen für die restlichen fünf Begrenzungsflächen ist völlig analog dazu, die nötigen Gebietsbilder, wie in Abbildung 3.39 ermittelt, finden sich in A.4.

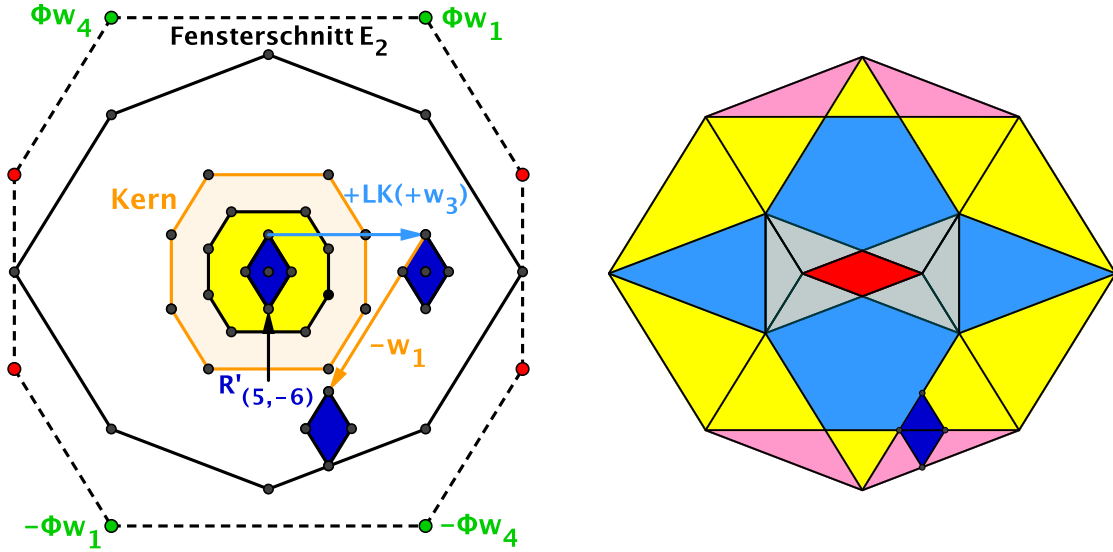


Abbildung 3.40.: Auf der Ebene $E_{2-}^{(5,-6)}$ überlagert die Verschiebung der Begrenzungsfläche $R'_{(5,-6)}$ in Richtung $+w_3 - w_1$ ein Gebiet des Typs Ω_4 sowie ein Gebiet des Typs Ω_5 .

Damit folgt, dass der Punkt $z_{E'} - \varphi^3 v_3 + \varphi^3 v_1$ im feinen Muster SM_E sowohl eine Ecke des Typs ω_4 als auch eine Ecke des Typs ω_5 sein kann, und die Eindeutigkeit für den dritten Deflationszug im Fall des flachen Steins ist widerlegt.

Durch analoges Vorgehen erhalten wir insgesamt für das Gebiet V_F die in Abbildung 3.41 gezeigte Gebietseinteilung. Es kommen demnach keine weiteren Eckentypen für den Punkt $z_{E'} - \varphi^3 v_3 + \varphi^3 v_1$ im feinen Muster SM_E hinzu.

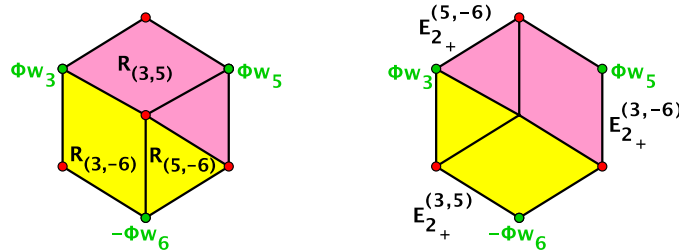


Abbildung 3.41.: Die Eckenumgebung des Punktes $z_{E'} - \varphi^3 v_3 + \varphi^3 v_1$ im Muster SM_E

□

Somit ist klar: Im Fall des dreidimensionalen Penrose-Musters gibt es keine völlig eindeutige Unterteilung des flachen Pflastersteins! Wir müssen daher ganz konkret für jede einzelne Linse nachprüfen, wie viele der zehn Füllmöglichkeiten stets realisiert werden. Um aber nicht in einem Chaos von zu untersuchenden Punkten zu versinken, soll zunächst noch ein Blick auf die Symmetrie des flachen Pflastersteins geworfen werden.

3. Deflation im Fall von Penrose 3D

Beobachtung 3.21. *Der flache Pflasterstein besitzt die folgenden Symmetrien:*

- *Er ist punktsymmetrisch zum Mittelpunkt seiner Diagonalen.*
- *Er ist drehsymmetrisch um einen Winkel von 120° um seine kurze Diagonale.*
- *Er ist spiegelsymmetrisch zu drei Ebenen. Nach Wahl der Koordinaten sind das die Spiegelebene $S_{(1,5)}$ durch die Einheitsrichtungen $\pm v_1$ und $\pm v_5$, die Spiegelebene $S_{(2,3)}$ durch die Einheitsrichtungen $\pm v_2$ und $\pm v_3$ sowie die Spiegelebene $S_{(4,6)}$ durch die Einheitsrichtungen $\pm v_4$ und $\pm v_6$.*

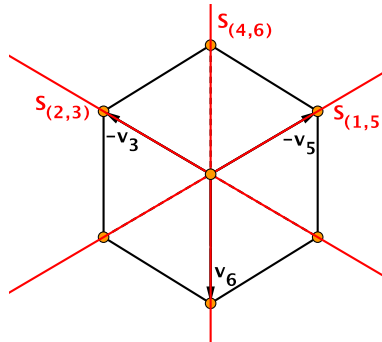


Abbildung 3.42.: Die drei Spiegelebenen $S_{(1,5)}$ und $S_{(2,3)}$ sowie $S_{(4,6)}$ des flachen Pflastersteins

Bemerkung. Diese Beobachtung hat eine wichtige Konsequenz: Es wird im Folgenden ausreichend sein, die Gebietsbilder einzelner Punkte im feinen Muster SM_E zu bestimmen. Durch die genannten Symmetrien lassen sich die Ergebnisse dann auf viele weitere Punkte in SM_E übertragen. Daneben sind aber auch die am Ende von Kapitel 1 genannten Symmetrien des Fensters V zu berücksichtigen, vgl. Beobachtung 1.20, denn mit Hilfe dieser folgt: Nicht das Gebiet V_F als Ganzes, sondern nur genau ein Sechstel dieses Gebiets müssen betrachtet werden, siehe die Festlegung in Abbildung 3.46!

Schließlich wird noch die folgende Beobachtung hilfreich sein:

Beobachtung 3.22. *Im Inneren der Linse existieren stets zwei Ecken des Typs ω_4 und zwei Ecken des Typs ω_5 .*

Beweis. Nach Beobachtung 3.13 ist bekannt, dass es bis auf Isomorphie nur eine einzige Möglichkeit gibt, eine Linse mit fünf langen und fünf flachen Pflastersteinen zu füllen. Wir können uns daher ganz konkret am Modell ansehen, welche Eckentypen innerhalb einer Linse existieren: Die farbig markierten Punkte sowie die farbig markierten Kanten in Abbildung 3.43 sind gerade die Punkte und Kanten im Inneren einer Linse und wir sehen damit, dass es genau zwei Ecken des Typs ω_4 und zwei Ecken des Typs ω_5 gibt.

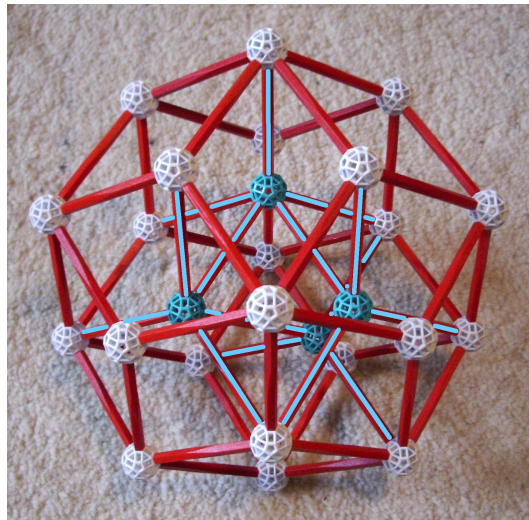


Abbildung 3.43.: Im Inneren der Linse existieren je zwei Ecken des Typs ω_4 und ω_5 .

□

Bemerkung. Vorsicht vor Verwirrung! Beobachtung 3.22 sagt lediglich, dass es im Inneren einer Linse prinzipiell vier Punkte geben muss: je zwei Ecken des Typs ω_4 sowie je zwei Ecken des Typs ω_5 . Das heißt aber noch nicht, dass immer die gleichen vier Punkte im Linseninneren existieren. Klar ist jedoch: Kennen wir die genaue Eckenumgebung der vier Punkte im Linseninneren, so ist die Füllung der Linse damit eindeutig festgelegt!

Damit haben wir alle nötigen Voraussetzungen, um die Frage nach der Füllung der einzelnen Linsen beantworten zu können. Es gilt:

Beobachtung 3.23. *Die Füllung der Linsen im flachen Pflasterstein ist nicht einheitlich. Genauer:*

- *Zwei benachbarte innere Linsen sind eindeutig gefüllt, die restlichen vier inneren Linsen besitzen je zwei mögliche Füllungen.*
- *Die äußere Linse zwischen den beiden inneren Linsen, welche eindeutig gefüllt sind, ist ebenfalls eindeutig gefüllt.*
- *Die beiden benachbarten äußeren Linsen dieser eindeutig gefüllten äußeren Linse besitzen wieder je zwei Füllmöglichkeiten.*
- *Zwei weitere äußere Linsen besitzen je vier mögliche Füllungen und die der eindeutig gefüllten äußeren Linse gegenüberliegende äußere Linse realisiert tatsächlich alle zehn theoretisch möglichen Füllungen.*

Beweis. Betrachten wir in einem ersten Schritt Linse 1, eine sogenannte innere Linse, vgl. Abbildung 3.21, und bestimmen nach dem Vorgehen wie in Beobachtung 3.20

3. Deflation im Fall von Penrose 3D

ausführlich vorgestellt die Gebietsbilder aller Punkte, welche im feinen Muster SM_E innerhalb dieser Linse existieren. Der Übersicht halber werden an dieser Stelle nur die Ergebnisse, nicht aber die Konstruktionen gezeigt.

Bemerkungen zu Abbildung 3.44:

- In Analogie zu der bereits bekannten Notation bezeichnet der Punkt $-3, 1, -6$ den Punkt $z_{E'} - \varphi^3 v_3 + \varphi^3 v_1 - \varphi^3 v_6$, wobei $z_{E'}$ wieder die in Abbildung 3.38 markierte vordere stumpfe Ecke des groben flachen Steins ist. Die restlichen Punkte sind ebenfalls entsprechend dieser Notation zu verstehen, vgl. auch Abbildung 3.11 sowie die Bemerkung auf Seite 83. Im Folgenden werden die beiden Schreibweisen äquivalent verwendet.
- Die sieben genannten Punkte liegen alle innerhalb der Linse 1. Die dazugehörigen Gebietsbilder zeigen ausschließlich gelbe und rosa Gebiete, was bedeutet, dass diese Punkte allesamt Ecken des Typs ω_4 und ω_5 sind.
- Bestimmte Teile der jeweils um die entsprechenden Einheitsrichtungen verschobenen Gebiete V_F sind für einige Punkte nicht markiert. Diese Bereiche liegen somit gerade nicht im Fenster V und die entsprechenden Punkte existieren damit nicht immer.
- Eine genaue Betrachtung der Gebietsbilder zeigt: Es existieren stets vier der sieben Punkte gleichzeitig, genauer noch stets zwei Ecken des Typs ω_4 und zwei Ecken des Typs ω_5 . Mit Beobachtung 3.22 folgt daher, dass es neben den genannten sieben Punkten keine weiteren Punkte im Inneren der Linse gibt. Wir haben damit alle nötigen Informationen, um die Füllung von Linse 1 eindeutig zu bestimmen.
- Welche der Einheitsrichtungen $\pm\varphi^3 v_i$ mit $1 \leq i \leq 6$ konkret für jeden einzelnen Punkt erlaubt sind, ist für unsere Zwecke nicht von Bedeutung. Die Frage, die uns interessiert, lautet: Wie viele verschiedene Füllmöglichkeiten gibt es für Linse 1, d. h. wie viele unterschiedliche Konstellationen mit zwei Ecken des Typs ω_4 und zwei Ecken des Typs ω_5 innerhalb der Linse 1 existieren? Dies lässt sich unmittelbar aus Abbildung 3.44 entnehmen.

Um nun die Frage zu klären, wie viele der theoretisch zehn Möglichkeiten, eine Linse mit jeweils fünf langen und fünf flachen Pflastersteinen des feinen Musters SM_E zu füllen, im Fall von Linse 1 tatsächlich realisiert werden, müssen wir nach den obigen Bemerkungen gerade den Schnitt der Gebietsbilder aller Punkte innerhalb dieser Linse bilden, d. h. wir müssen untersuchen, in wie viele Teilgebiete V_F bezüglich der in Abbildung 3.44 gezeigten Gebietsbilder zerfällt. Mit anderen Worten: Die Anzahl der Teilgebiete einer Linse gibt gerade darüber Aufschluss, wie viele Füllmöglichkeiten es für diese Linse gibt! Ein Blick auf Abbildung 3.44 zeigt, dass bezüglich Linse 1 vier Teilgebiete existieren.

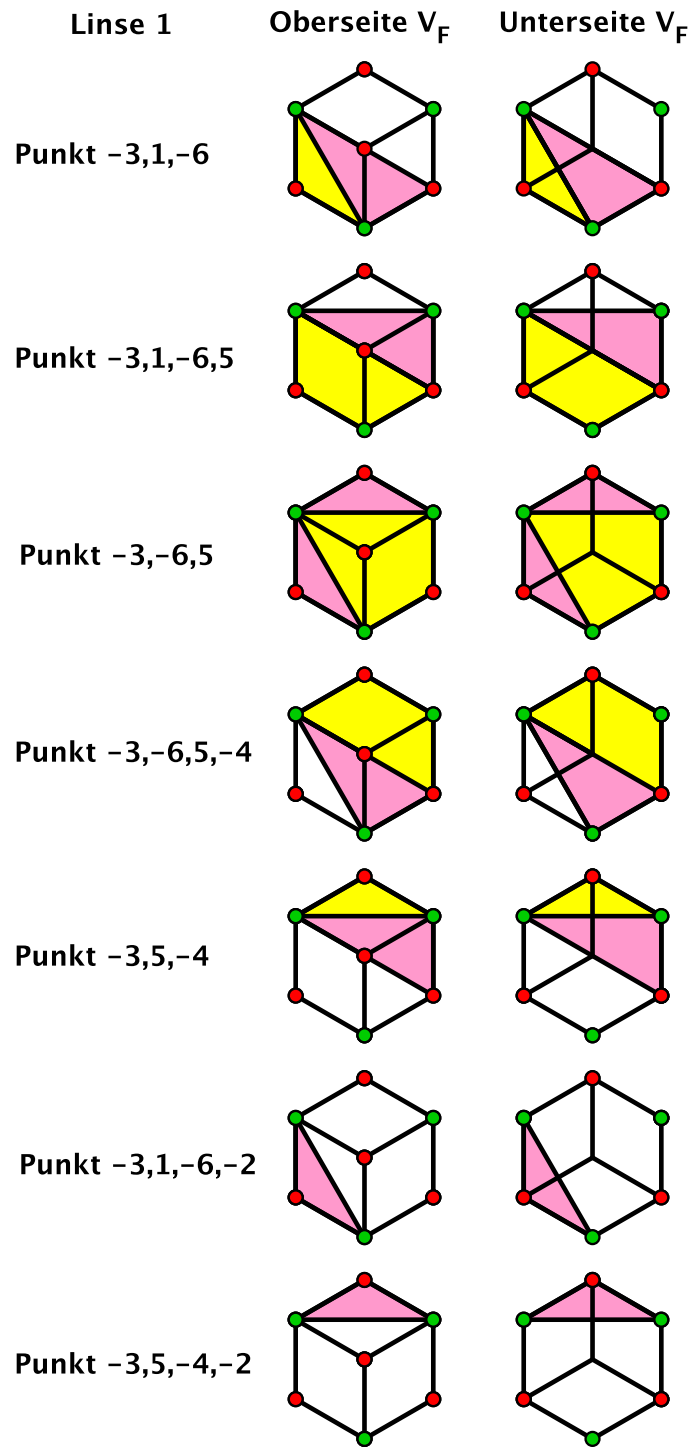


Abbildung 3.44.: Die Eckenumgebung aller in Linse 1 möglichen Punkte im Muster SM_E

3. Deflation im Fall von Penrose 3D

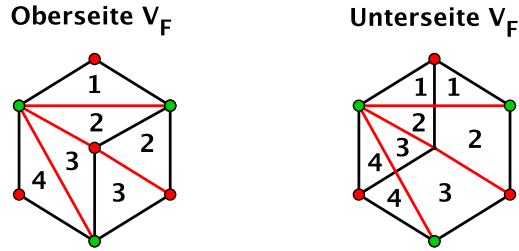


Abbildung 3.45.: Die vier Teilgebiete des Gebiets V_F bezüglich Linse 1

Gemäß der Bemerkung auf Seite 114 ist es jedoch ausreichend, nur ein Sechstel des Gebiets V_F zu betrachten. O. B. d. A. legen wir uns daher im Weiteren auf die in Abbildung 3.46 gezeigte Einschränkung $V_{F'}$ fest. Betrachten wir nun die ermittelten Teilgebiete aus

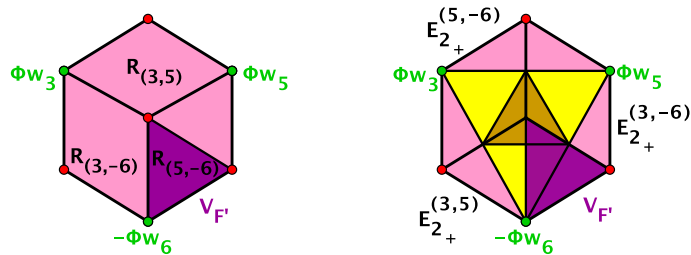


Abbildung 3.46.: Die Einschränkung $V_{F'}$ des Gebiets V_F auf ein Sechstel des Gesamtgebiets

Abbildung 3.45 in Bezug auf diese Einschränkung, so folgt: Linse 1 realisiert nur eine einzige Füllmöglichkeit, denn eingeschränkt auf $V_{F'}$ existiert nur ein einziges Teilgebiet.⁴²

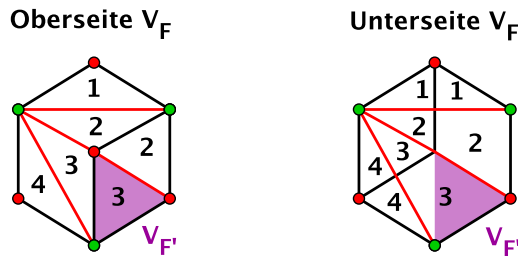


Abbildung 3.47.: Bezüglich der Einschränkung $V_{F'}$ existiert für Linse 1 nur ein Teilgebiet.

Unter Zuhilfenahme der in Beobachtung 3.21 angesprochenen Symmetrien können diese Ergebnisse auch auf die restlichen inneren Linsen 2 bis 6 übertragen werden. Da wir bezüglich der Frage nach der Anzahl der Füllmöglichkeiten weniger an den Gebietsbildern aller Punkte innerhalb der unterschiedlichen Linsen im Detail, sondern vielmehr am Schnitt dieser Gebietsbilder interessiert sind, führen wir die unten genannten Spiegelungen an Abbildung 3.45 statt an Abbildung 3.44 durch:

⁴² Alternativ sehen wir das in Abbildung 3.44 daran, dass die vier Punkte $-3, 1, -6$ und $-3, 1, -6, 5$ sowie $-3, -6, 5$ und $-3, -6, 5, -4$ innerhalb von $V_{F'}$ jeweils einen eindeutigen Eckentyp besitzen.

3.5. Die Festlegung auf einen Pflasterstein

$$\begin{array}{lll} \text{Linse 1} & \xrightarrow{\text{Spiegelung an } S_{(4,6)}} & \text{Linse 3} \xrightarrow{\text{punktsymmetrisch}} \text{Linse 6} \\ \text{Linse 1} & \xrightarrow{\text{Spiegelung an } S_{(1,5)}} & \text{Linse 5} \xrightarrow{\text{punktsymmetrisch}} \text{Linse 2} \\ \text{Linse 1} & \xrightarrow{\text{punktsymmetrisch}} & \text{Linse 4} \end{array}$$

Auf diese Weise erhalten wir die Teilgebiete des Gebiets V_F bzw. die Teilgebiete von dessen Einschränkung $V_{F'}$ bezüglich der Linsen 2 bis 6 und damit die Anzahl der Füllmöglichkeiten für diese Linsen.

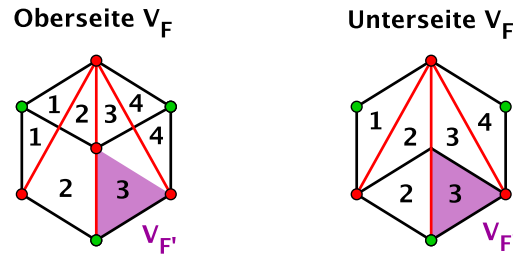


Abbildung 3.48.: Bezüglich der Einschränkung $V_{F'}$ existiert für Linse 2 nur ein Teilgebiet.

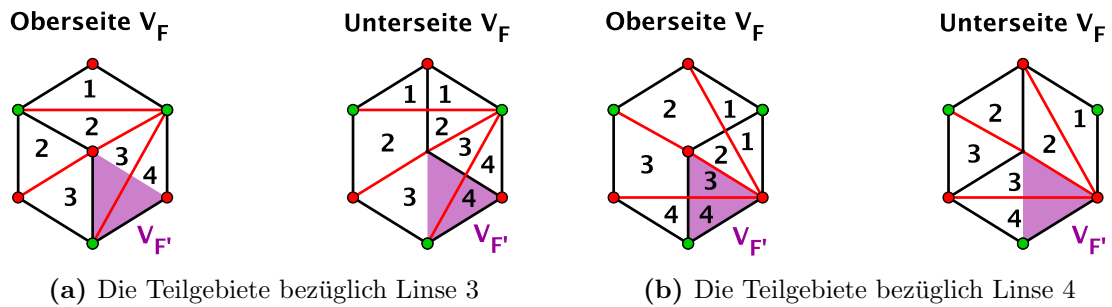


Abbildung 3.49.: Bezüglich der Einschränkung $V_{F'}$ existieren für Linse 3 und Linse 4 jeweils zwei Teilgebiete.

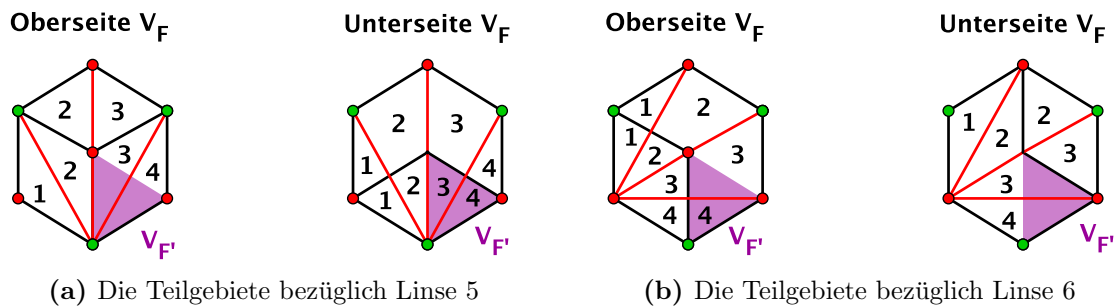


Abbildung 3.50.: Bezüglich der Einschränkung $V_{F'}$ existieren für Linse 5 und Linse 6 ebenfalls je zwei Teilgebiete.

3. Deflation im Fall von Penrose 3D

Damit gilt: Für Linse 2 gibt es in Bezug auf die Einschränkung $V_{F'}$ wie auch schon im Fall von Linse 1 nur ein einziges Teilgebiet. Daher lässt auch Linse 2 nur eine Füllmöglichkeit zu. Für die Linsen 3 und 4 sowie 5 und 6 existieren dagegen jeweils zwei Teilgebiete, was bedeutet, dass in diesen Fällen je zwei der theoretisch zehn möglichen Füllungen tatsächlich realisiert werden.

Im Fall der äußeren Linsen gestaltet sich die Situation ähnlich: Auch hier kann man durch Anwendung der in Beobachtung 3.21 genannten Symmetrien aus den Gebietsbildern der Punkte innerhalb einer Linse die Gebietsbilder der Punkte innerhalb der restlichen äußeren Linsen erstellen: Aus dem Schnitt der Gebietsbilder aller Punkte innerhalb einer Linse erhält man auch sofort den Schnitt der Gebietsbilder aller Punkte innerhalb der übrigen äußeren Linsen. Ebenso gelten die Bemerkungen von Seite 116, mit dem Unterschied, dass nun zehn verschiedene Punkte im Inneren einer Linse liegen und nicht nur sieben! Für Linse 10 ergibt sich demnach die folgende Situation:

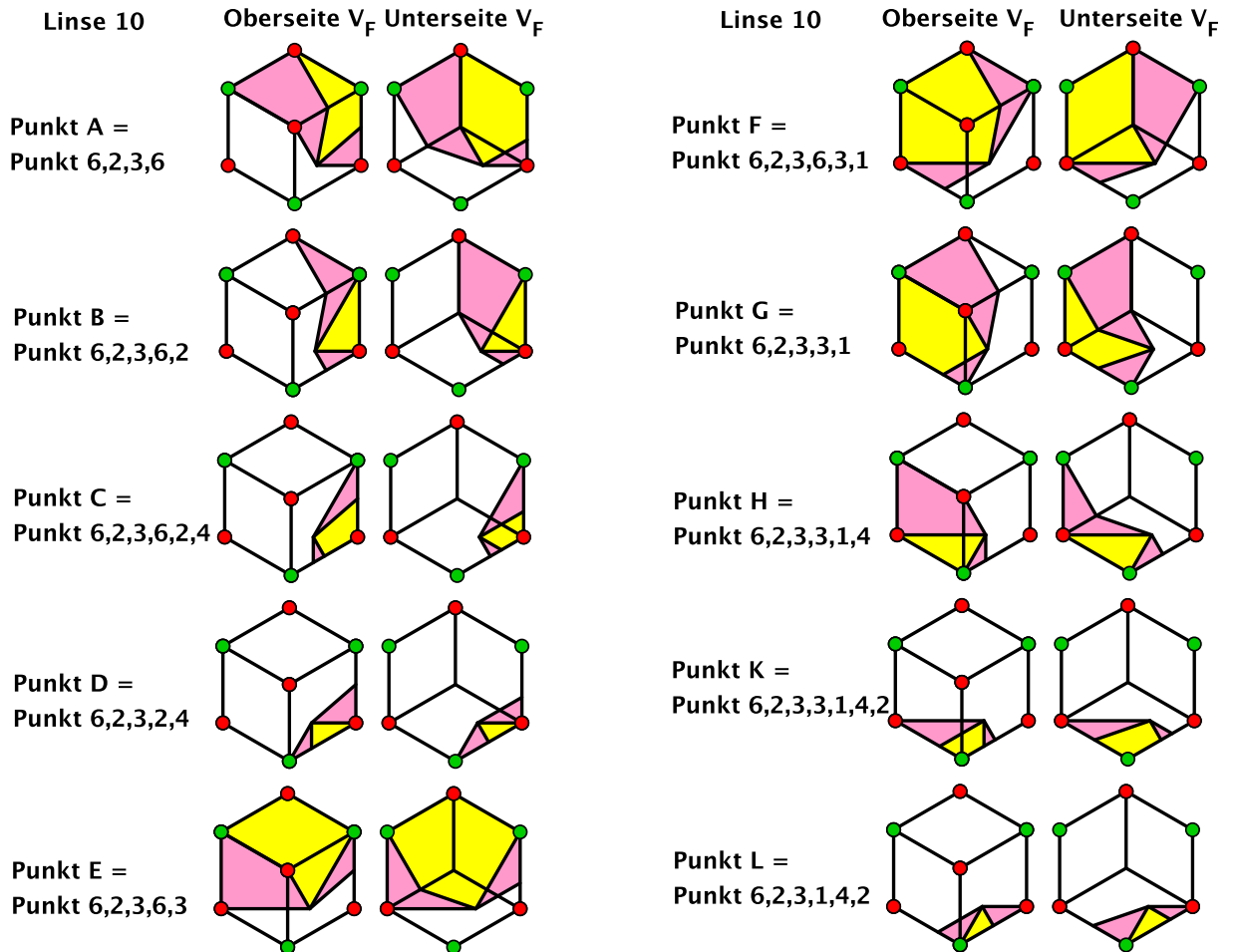


Abbildung 3.51.: Die Eckenumgebung aller in Linse 10 möglichen Punkte im Muster SM_E

3.5. Die Festlegung auf einen Pflasterstein

Betrachten wir auch diese Bilder wieder in Bezug auf die in Abbildung 3.46 festgelegte Einschränkung $V_{F'}$, wird klar, dass in diesem Fall nicht sofort ersichtlich ist, wie der Schnitt der Gebietsbilder aller in Linse 10 möglichen Punkte aussieht, d.h. in welche Teilgebiete $V_{F'}$ zerfällt. Eine genaue Betrachtung liefert das in Abbildung 3.52 gezeigte Ergebnis: Die Einschränkung $V_{F'}$ zerfällt in zehn Teilgebiete, und somit realisiert Linse 10 tatsächlich auch alle zehn theoretisch möglichen Füllungen!

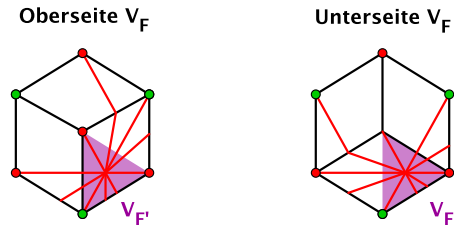


Abbildung 3.52.: Bezüglich der Einschränkung $V_{F'}$ existieren für Linse 10 zehn Teilgebiete.

Für ein besseres Verständnis wollen wir an dieser Stelle die Einschränkung $V_{F'}$ noch um 210° gedreht betrachten und die einzelnen Teilgebiete nummerieren. Tabelle 3.4 gibt Auskunft darüber, welche vier der zehn Punkte aus Abbildung 3.51 dabei für die unterschiedlichen Teilgebiete jeweils existieren.



Abbildung 3.53.: Die Einschränkung $V_{F'}$ bezüglich Linse 10

Teilgebiet	Ecken des Typs ω_4	Ecken des Typs ω_5
1	Punkt D und Punkt H	Punkt K und Punkt L
2	Punkt C und Punkt K	Punkt D und Punkt L
3	Punkt B und Punkt L	Punkt C und Punkt D
4	Punkt A und Punkt D	Punkt B und Punkt C
5	Punkt C und Punkt E	Punkt A und Punkt B
6	Punkt B und Punkt F	Punkt A und Punkt E
7	Punkt A und Punkt G	Punkt E und Punkt F
8	Punkt E und Punkt H	Punkt F und Punkt G
9	Punkt F und Punkt K	Punkt G und Punkt H
10	Punkt G und Punkt L	Punkt H und Punkt K

Tabelle 3.4.: Die Punkte in den unterschiedlichen Teilgebieten von $V_{F'}$ bezüglich Linse 10

Wendet man nun, wie bereits oben ausgeführt, die in Beobachtung 3.21 genannten Symmetrien auf das in Abbildung 3.52 gezeigte Schnittbild der Gebietsbilder aller Punkte

3. Deflation im Fall von Penrose 3D

innerhalb der Linse 10 an, so erhält man die Teilgebiete des Gebiets V_F bzw. die Teilgebiete von dessen Einschränkung $V_{F'}$ bezüglich der Linsen 7 und 8 sowie 9 und 11 sowie 12. Ganz konkret gelten die folgenden Symmetrien:

$$\begin{array}{ll} \text{Linse 10} \xrightarrow{\text{Spiegelung an } S_{(1,5)}} \text{Linse 7} & \text{Linse 10} \xrightarrow{\text{Drehung um } 240^\circ} \text{Linse 12} \\ \text{Linse 10} \xrightarrow{\text{Spiegelung an } S_{(2,3)}} \text{Linse 9} & \text{Linse 10} \xrightarrow{\text{Drehung um } 120^\circ} \text{Linse 8} \\ \text{Linse 10} \xrightarrow{\text{Spiegelung an } S_{(4,6)}} \text{Linse 11} & \end{array}$$

und wir erhalten somit:

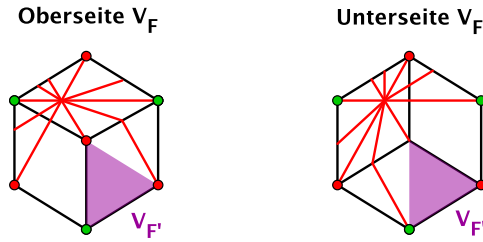


Abbildung 3.54.: Bezüglich der Einschränkung $V_{F'}$ existiert für Linse 7 nur ein Teilgebiet.

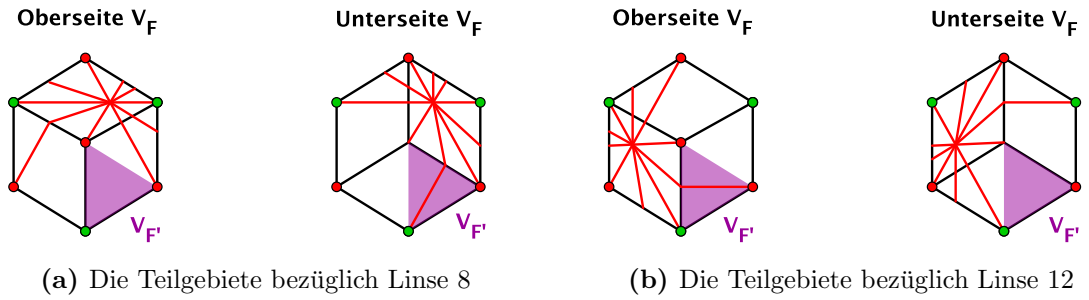


Abbildung 3.55.: Bezüglich der Einschränkung $V_{F'}$ existieren für Linse 8 und Linse 12 jeweils zwei Teilgebiete.

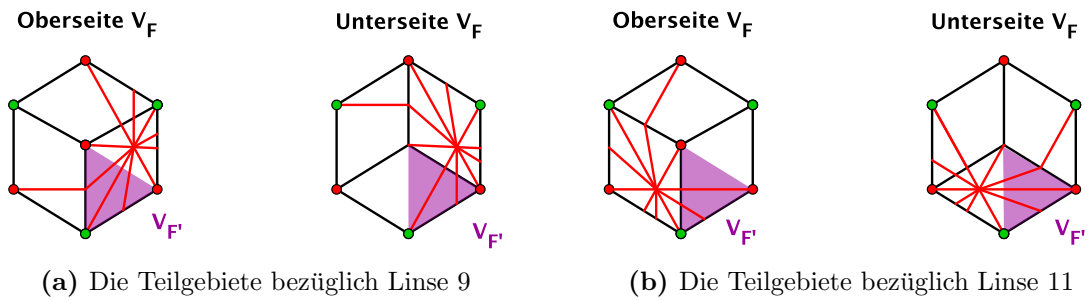


Abbildung 3.56.: Bezüglich der Einschränkung $V_{F'}$ existieren für Linse 9 und Linse 11 jeweils vier Teilgebiete.

Linse 7 besitzt damit eine eindeutige Linsenfüllung, Linse 8 und Linse 12 realisieren jeweils zwei der theoretisch zehn Füllmöglichkeiten und Linse 9 sowie Linse 11 besitzen je vier verschiedene Füllungen.

Fassen wir alle Ergebnisse zusammen, so ergibt sich die Situation wie in Abbildung 3.57 gezeigt. Schwarz markiert ist die Nummerierung der Linsen wie in Abbildung 3.21 eingeführt. Der rot gekennzeichnete Index jeder Linse nennt darüber hinaus die soeben ermittelte Anzahl der möglichen Linsenfüllungen in Bezug auf die gewählte Einschränkung $V_{F'}$.

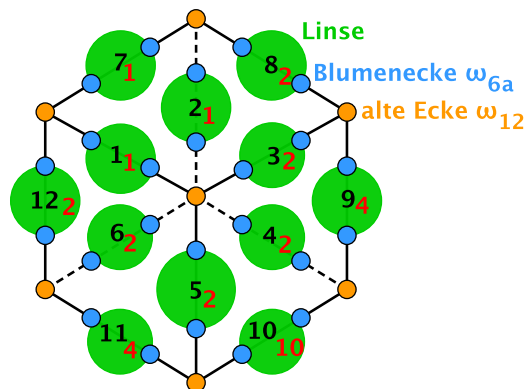


Abbildung 3.57.: Die Anzahl der Linsenfüllungen des flachen Pflastersteins bezüglich der in Abbildung 3.46 festgelegten Einschränkung V_F

Durch Einschränkung auf ein anderes Sechstel des Gebiets V_F gelten die Aussagen entsprechend für jeweils andere innere und äußere Linsen. Die prinzipielle Konstellation⁴³ bleibt jedoch stets die Gleiche, und damit ist Beobachtung 3.23 gezeigt!

Unter Berücksichtigung der Beobachtungen 3.13 und 3.14 sowie 3.17 und 3.18 können wir abschließend noch die Anzahl der Pflastersteine ermitteln, die den flachen Stein im Deflationsfall unterteilen, vgl. [O1],[O2]. Es gilt:

Beobachtung 3.24. Der flache Stein des groben Musters $M_{E'}$ wird mit 34 langen und 21 flachen Pflastersteinen des feinen Musters SM_E ausgefüllt.

Beweis. Die Unterteilung des groben flachen Steins setzt sich nach den Ergebnissen dieses Abschnitts zusammen aus:

- langen Pflastersteinen, die um jede alte Ecke ω_{12} herum anliegen. Die Beobachtungen 3.14 und 3.18 klären dabei, wie viele dieser insgesamt 20 langen Steine um jede alte Ecke jeweils auch tatsächlich im Inneren des flachen Steins liegen.
- der Lücke im Inneren des Steins. Diese ist mit insgesamt 13 langen und 6 flachen Pflastersteinen gefüllt, siehe Beobachtung 3.17.

⁴³Zwei benachbarte innere Linsen sind eindeutig gefüllt, ebenso die zwischen diesen beiden Linsen liegende äußere Linse, usw.

3. Deflation im Fall von Penrose 3D

- den Linsen, für die es nach Beobachtung 3.13 eine bis auf Isomorphie eindeutige Füllung, bestehend aus 5 langen und 5 flachen Pflastersteinen, gibt.

Da die Linsen, welche nach den Ergebnissen in 3.4 an jeder beliebigen Kante des groben Musters $M_{E'}$ existieren, allerdings nicht vollständig im Inneren des groben flachen Steins liegen, bleibt als ein letzter Punkt zu klären, welcher Teil der Linsen jeweils ins Innere des flachen Steins ragt. Betrachten wir die folgende schematische Darstellung, so wird klar, dass diese Frage implizit ebenfalls bereits beantwortet worden ist.

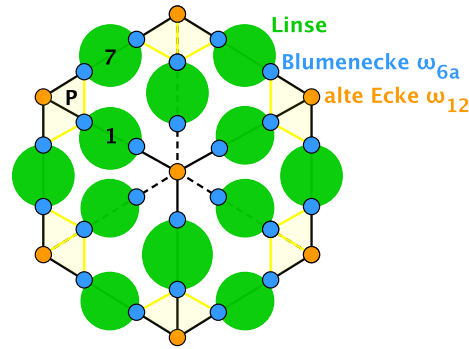


Abbildung 3.58.: Schematische Darstellung des unterteilten flachen Pflastersteins

Bemerkungen zu Abbildung 3.58:

- Zwischen einer alten Ecken ω_{12} , gelb markiert, und einer Blumenecke ω_{6a} , blau markiert, liegen um jede Kante fünf lange Pflastersteine an, vgl. Abbildung 3.16.
- An diese langen Pflastersteine schließen direkt die Linsen an, was bedeutet, dass jeweils eine Grundseite dieser langen Steine Teil des *Linsengehäuses* ist, siehe Abbildung 3.20.
- Welcher Teil der Linsen ins Innere des flachen Pflastersteins ragt, ist damit implizit bereits durch die Frage, wie viele der langen Pflastersteine um jede alte Ecke ω_{12} herum jeweils im Inneren des flachen Pflastersteins liegen, vgl. die Beobachtungen 3.14 und 3.18, geklärt worden.
- Nach Beobachtung 3.18 wissen wir, dass an jeder der sechs spitzen Ecken des flachen Steins jeweils zwei halbe lange Pflastersteine im Inneren dieses Steins liegen. Diese sind in Abbildung 3.58 gelb eingezeichnet. Für die sechs Grundseiten eines jeden solchen langen Pflastersteins gilt folglich: Je zwei Goldene Rauten liegen außerhalb des flachen Steins, je zwei Rauten liegen gerade zur Hälfte im Inneren des flachen Steins und je zwei Rauten liegen stets innerhalb des flachen Steins.
- Betrachten wir exemplarisch den mit P gekennzeichneten langen Pflasterstein, so gilt: Die Grundseite dieses Steins, die Teil des Gehäuses von Linse 7 ist, liegt zur Hälfte im Inneren des flachen Steins, die Grundseite, die Teil des Gehäuses von Linse 1 ist, liegt dagegen ganz im Inneren des flachen Steins.

3.5. Die Festlegung auf einen Pflasterstein

- Unter Berücksichtigung der Symmetrien des flachen Steins, vgl. Beobachtung 3.21, kann dieses Ergebnis schließlich auf alle übrigen in Abbildung 3.58 gelb markierten langen Pflastersteine übertragen werden, und damit ist klar, dass jede äußere Linse jeweils zu $\frac{1}{10}$ und jede innere Linse stets zu $\frac{2}{5}$ im Inneren des flachen Steins liegt.

Bezeichnet L den langen und F den flachen Stein, so gilt demnach für die Anzahl A_F der langen und flachen Pflastersteine des feinen Musters SM_E im Inneren des groben flachen Steins:

$$A_F = \underbrace{6 \cdot \left(2 \cdot \frac{1}{2} L\right)}_{\text{spitze Ecken}} + \underbrace{13 L + 6 F}_{\text{Lücke}} + \underbrace{6 \cdot \left(\frac{1}{10}(5 L + 5 F)\right)}_{\text{äußere Linsen}} + \underbrace{6 \cdot \left(\frac{2}{5}(5 L + 5 F)\right)}_{\text{innere Linsen}} = 34 L + 21 F.$$

□

3.5.2. Die Unterteilung des langen Pflastersteins

Das Vorgehen gestaltet sich analog zu dem im Fall des flachen Steins. Zu klären sind auch hier die folgenden drei Fragen: Mit welchen Pflastersteinen des feinen Musters SM_E wird die Lücke im Inneren des groben langen Steins gefüllt und ist diese Füllung der Lücke eindeutig, was passiert an den Ecken dieses Steins und wie viele der zehn zueinander isomorphen Füllmöglichkeiten werden für jede der Linsen tatsächlich realisiert?

Die Ecken

Wir wollen zunächst klären, was an den einzelnen Ecken des groben langen Pflastersteins geschieht: Wie viele der jeweils 20 um eine alte Ecke herum anliegenden langen Steine des feinen Musters SM_E , vgl. Beobachtung 3.12, liegen auch tatsächlich im Inneren des groben langen Pflastersteins?

Beobachtung 3.25. *An den zwei spitzen Ecken des groben langen Pflastersteins liegt jeweils ein ganzer langer Pflasterstein des feinen Musters SM_E im Inneren des Steins.*

Beweis. Hierzu muss Abbildung 3.23 um die schematische Darstellung einer spitzen Ecke des langen Steins ergänzt werden:

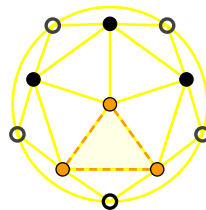


Abbildung 3.59.: Eine spitze Ecke des langen Steins samt 15 der insgesamt 20 Möglichkeiten, mit den dargestellten Ikosaederecken einen langen Stein, ausgehend von einer spitzen Ecke, zu realisieren

Bemerkungen zu Abbildung 3.59:

- Orange markiert sind die drei Ikosaederecken, die eine spitze Ecke des langen Steins bilden: Es sind paarweise direkte Nachbarn im Ikosaeder.
- Gelb markiert sind die 15 Möglichkeiten, mit den elf dargestellten Ikosaederecken einen langen Pflasterstein, ausgehend von seiner spitzen Ecke, zu bilden, vgl. Abbildung 3.23.
- Allein die gelb untermalte Kombinationsmöglichkeit liegt ganz im Aufspann der drei orange markierten Ikosaederecken, und damit liegt genau ein langer Pflasterstein ganz im Inneren des groben langen Steins.

□

Mit denselben Methoden erhalten wir für die stumpfen Ecken des langen Pflastersteins:

Beobachtung 3.26. *An den sechs stumpfen Ecken des groben langen Pflastersteins liegen jeweils ein ganzer und vier halbe lange Pflastersteine des feinen Musters SM_E im Inneren des Steins.*

Beweis. In diesem Fall ergänzen wir Abbildung 3.23 um eine stumpfe Ecke des langen Steins:

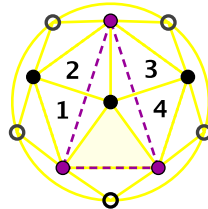


Abbildung 3.60.: Eine stumpfe Ecke des langen Steins samt 15 der insgesamt 20 Möglichkeiten, mit den dargestellten Ikosaederecken einen langen Stein, ausgehend von einer spitzen Ecke, zu realisieren

Bemerkungen zu Abbildung 3.60:

- Lila markiert sind die drei Ikosaederecken, die eine stumpfe Ecke des langen Steins bilden: Es sind zwei übernächste Nachbarn und ein direkter Nachbar im Ikosaeder.
- Gelb markiert sind wieder die 15 Möglichkeiten, mit den elf dargestellten Ikosaederecken einen langen Pflasterstein, ausgehend von seiner spitzen Ecke, zu bilden.
- Gewissermaßen in der Mitte der drei lila markierten Ecken liegt eine weitere Ikosaederecke. Gemeinsam mit den beiden lila gekennzeichneten Ecken, die gerade direkte Nachbarn im Ikosaeder sind, bildet diese Ecke einen langen Stein, welcher ganz im Inneren des groben langen Steins liegt. In obiger Zeichnung entspricht diese Kombinationsmöglichkeit dem gelb untermalten Dreieck.
- Weil in obiger Zeichnung die Verbindung zwischen zwei benachbarten Ikosaederecken gerade der Raute, die von eben diesen beiden Ikosaederecken im Raum aufgespannt wird, entspricht, können wir für jede der mit 1 bis 4 gekennzeichneten Kombinationsmöglichkeiten feststellen: Eine Raute liegt jeweils ganz im Inneren des von den lila markierten Ecken aufgespannten groben langen Steins, eine Raute liegt gerade zur Hälfte in eben diesem Stein und eine Raute liegt stets außerhalb des langen Steins. Folglich bilden sämtliche genannten Kombinationen gerade lange Pflastersteine, die jeweils zur Hälfte im Inneren des groben langen Steins liegen.

□

Wir wissen nun, was an den Ecken eines beliebigen langen Pflastersteins geschieht und können uns daher in einem zweiten Schritt mit der Frage nach der Lücke im Inneren dieses Steins befassen.

Die Lücke im Inneren des Steins

Bevor geklärt werden kann, welche Pflastersteine des feinen Musters SM_E im Inneren der Lücke des groben langen Steins liegen und ob die Füllung der Lücke eindeutig ist, muss erst einmal die grundsätzliche Gestalt dieser Lücke ermittelt werden. Dazu wollen wir uns die Struktur der Linsen im langen Stein ansehen.

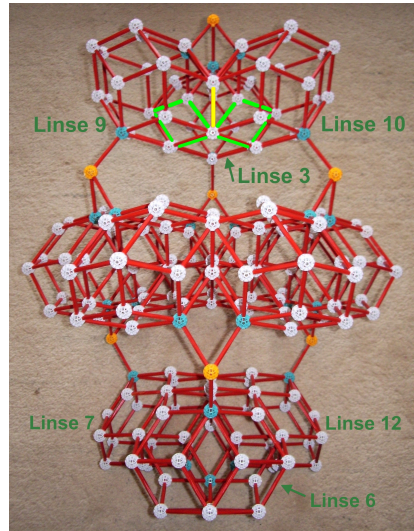


Abbildung 3.61.: Der Zusammenhang zwischen Linse 3 und Linse 9 sowie Linse 10

Wir sehen: Linse 3 und Linse 9 sowie Linse 3 und Linse 10 sind untereinander jeweils durch eine Raute verbunden, in Abbildung 3.61 grün markiert. Aber auch Linse 9 und Linse 10 teilen sich eine Raute. Diese liegt senkrecht zur Blickrichtung in Abbildung 3.61 und entspricht daher gerade der gelb markierten Kante! Dieselben Beobachtungen gelten auch für die Linsen 6 und 7 sowie 12, vgl. Abbildung 3.21. Nicht geklärt ist allerdings noch, wie die sechs übrigen Linsen untereinander verbunden sind. Aus Abbildung 3.61 ist dies nicht zu entnehmen, denn hier sind diese Linsen nichts anderes als ein unübersichtliches Durcheinander von Punkten und Kanten. Wir müssen daher die Perspektive ändern und betrachten im Folgenden die Linsen 1 und 2 sowie 4 und 5 sowie 8 und 11 isoliert vom Rest des langen Pflastersteins und um 90° im Raum gedreht.

Bemerkungen zu Abbildung 3.62:

- Die gelben Punkte sind die Eckpunkte des groben langen Pflastersteins. Zu sehen sind fünf der sechs stumpfen Ecken: Drei davon sind gut sichtbar, die übrigen zwei eher verdeckt.
- Die blauen Punkte sind die Nachbarpunkte der alten Ecken im feinen Muster SM_E . Diese sind bekanntlich alle vom Typ ω_{6a} , d. h. sogenannte Blumenecken.
- Im Unterschied zu Abbildung 3.61 ist hier nun eine klare Struktur erkennbar: Die Linsen 1 und 2 sowie 4 und 5 sowie 8 und 11 bilden gemeinsam eine Art

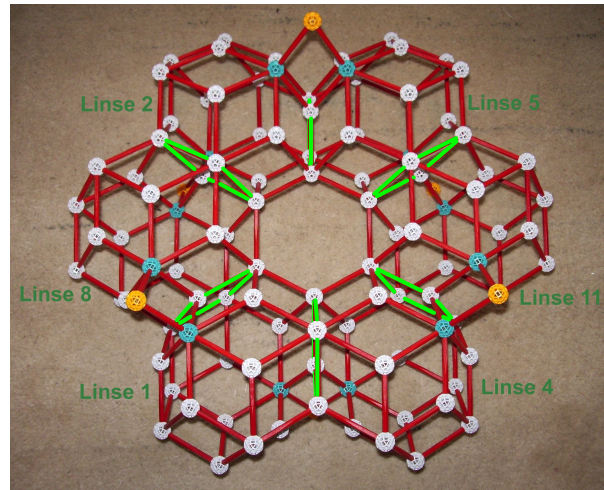


Abbildung 3.62.: Der Zusammenhang der Linsen 1 und 2 sowie 4 und 5 sowie 8 und 11

Linsenring, bei dem eine jede Linse mit ihrem linken und rechten Nachbarn durch eine gemeinsame Raute verbunden ist. Diese gemeinsamen Rauten sind in obiger Abbildung grün markiert.

- Die Mitte des Linsenrings ist nicht geschlossen, was bedeutet, dass sich die Lücke im Inneren des Steins auch tatsächlich über den ganzen Stein erstreckt und nicht etwa durch die dicht beieinander liegenden Linsen 1 und 2 sowie 4 und 5 sowie 8 und 11 unterbrochen wird.

Damit ergibt sich das folgende Prinzipbild:

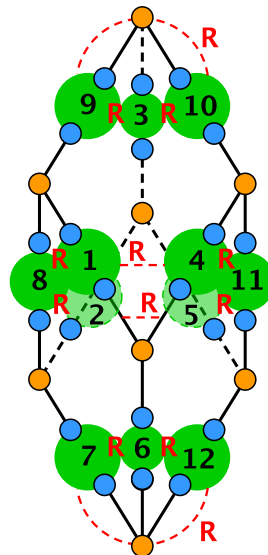


Abbildung 3.63.: Der Schnitt der Linsen im langen Stein

3. Deflation im Fall von Penrose 3D

Wir wissen somit nicht nur, was in Richtung der Linsen im feinen Muster SM_E geschieht – hier liegen entsprechend den Überlegungen in 3.4 von den alten Ecken aus jeweils lange Pflastersteine an, vgl. Abbildung 3.20 – sondern auch, wie die einzelnen Linsen untereinander verbunden sind, siehe Abbildung 3.63. Damit haben wir die Lücke im Inneren des groben Steins sozusagen vollständig umrandet: Will man nun die gesuchte Gestalt dieser Lücke ermitteln, so muss man Abbildung 3.61 um noch genau die langen Pflastersteine des feinen Musters SM_E ergänzen, welche nach den Beobachtungen 3.25 und 3.26 auch tatsächlich im Inneren des groben langen Steins liegen!

Aufgrund der Komplexität der sich ergebenden Darstellung, wird im Folgenden die Lücke im Inneren des groben langen Steins ohne die Linsen und die restlichen schon bekannten Steine des feinen Musters SM_E gezeigt:

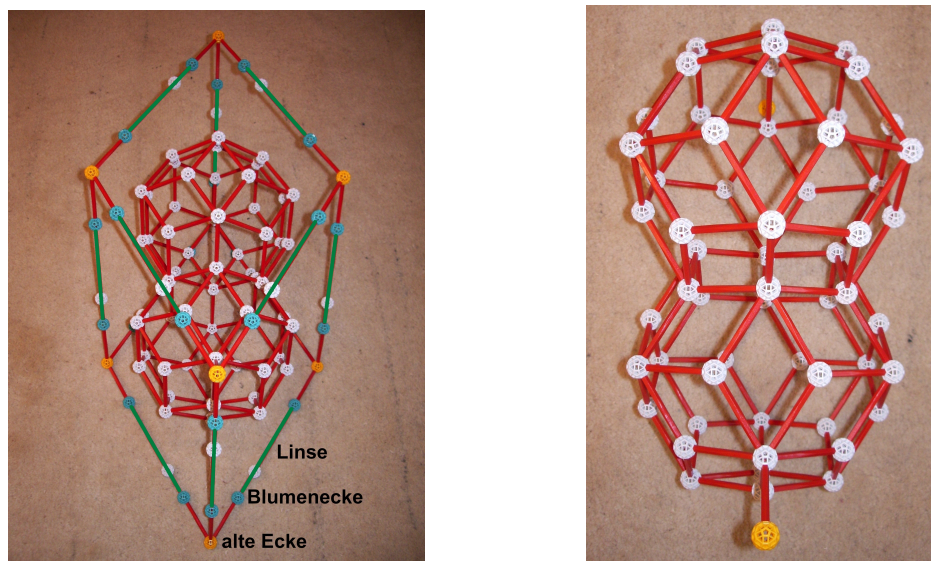


Abbildung 3.64.: Die Lücke im Inneren des groben langen Pflastersteins

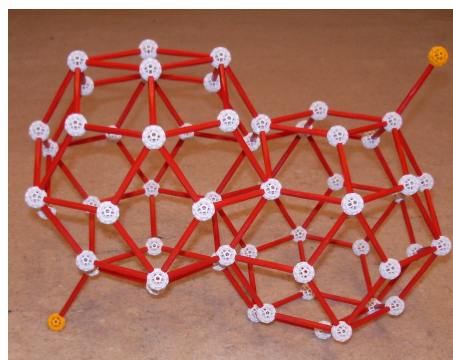


Abbildung 3.65.: Die Lücke im Inneren des groben flachen Steins um 90° gedreht

Beobachtung 3.27. Die Lücke im Inneren des groben langen Pflastersteins ist ein gleichseitiges Polyeder, bestehend aus 54 Goldenen Rauten, und hat die Gestalt zweier sich schneidender Rhombentriakontaeder.

Beweis. Dies sehen wir sofort anhand der eben gezeigten Abbildungen 3.64 und 3.65. \square

Für ein besseres Verständnis wollen wir Abbildung 3.65 noch ergänzen und für jede der Rauten der beiden Rhombentriakontaeder im Einzelnen angeben, wie diese dem langen Pflasterstein zuzuordnen ist:

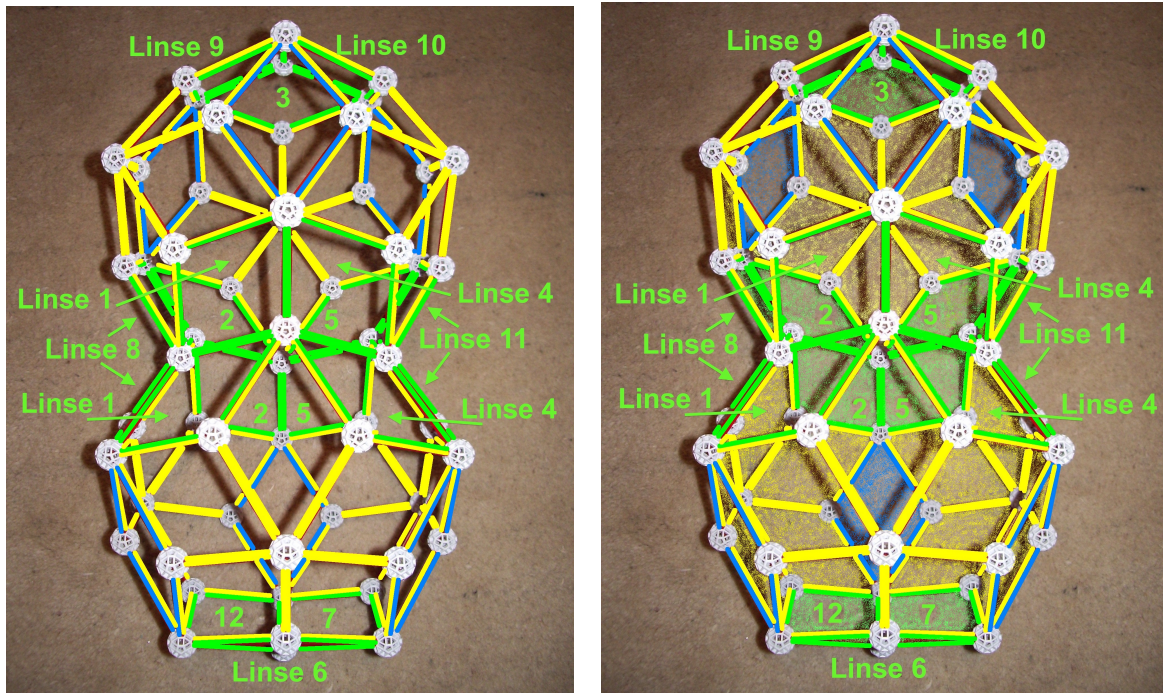


Abbildung 3.66.: Die Zuordnung der Rauten, die die Lücke im Inneren des groben langen Steins bilden. Im rechten Bild sind die unteren Rauten farblich markiert.

Bemerkungen zu Abbildung 3.66:

- Die 30 gelb markierten Rauten bilden jeweils eine der Grundseiten der langen Pflastersteine des feinen Musters SM_E , welche nach den Beobachtungen 3.25 und 3.26 um die einzelnen Ecken des groben langen Steins herum existieren und im Inneren des groben langen Steins liegen.
- Die 18 grün markierten Rauten sind jeweils Teil der genannten Linsen, genauer des Linsengehäuses.
- Die sechs blau markierten Rauten folgen aus der Existenz der gelben Rauten: Je vier gelbe Rauten bilden gemeinsam eine blaue Raute.

3. Deflation im Fall von Penrose 3D

Bemerkung. Das Rhombentriakontaeder, welches an die Linsen 6 und 7 sowie 12 anschließt, wollen wir im Folgenden als *vorderes Rhombentriakontaeder* bezeichnen, und analog dazu das Rhombentriakontaeder, das an die Linsen 3 und 9 sowie 10 anschließt, als *hinteres Rhombentriakontaeder*, vgl. Abbildung 3.66.

Damit ist die Gestalt der Lücke im Inneren des groben langen Pflastersteins bekannt und wir können klären, mit wie vielen Pflastersteinen des feinen Musters SM_E diese Lücke gefüllt werden kann und ob diese Füllung eindeutig ist. In Bezug auf die Frage nach der Eindeutigkeit der Unterteilung des groben langen Pflastersteins ist dies ein entscheidender Punkt: Sollte es mehr als eine Möglichkeit geben, die Lücke im Inneren des groben langen Steins mit Pflastersteinen des feinen Musters SM_E zu füllen, dann folgt daraus sofort, dass es – wie auch im Fall des flachen Pflastersteins – keine völlig eindeutige Unterteilung des groben langen Steins gibt!⁴⁴ Auch in diesem Zusammenhang ist bereits ein erstes Ergebnis bekannt, vgl. Beobachtung 3.13.

Beobachtung 3.28. *Bis auf Isomorphie gibt es genau eine Möglichkeit, ein Rhombentriakontaeder mit langen und flachen Pflastersteinen zu füllen:*

$$\text{Rhombentriakontaeder} = 10 \text{ lange Steine} + 10 \text{ flache Steine.}$$

Beweis. Wie schon im Beweis zu Beobachtung 3.13 erwähnt, ist auch das Rhombentriakontaeder eines der fünf Goldenen Isozonoeder, genannt K_{30} , und für dieses gilt nach Coxeter: $K_{30} = 10A_6 + 10O_6$, wobei A_6 wieder den langen und O_6 den flachen Pflasterstein bezeichnet, siehe [C],[MT],[S3] sowie Seite 14 und 15. \square

Mit Hilfe dieser Beobachtung kann man nun sofort sagen, mit welchen Pflastersteinen des feinen Musters SM_E die Lücke im Inneren des groben langen Steins gefüllt wird:

Beobachtung 3.29. *Die Lücke im Inneren des groben langen Steins ist mit 19 flachen und 20 langen Pflastersteinen des feinen Musters SM_E gefüllt.*

Beweis. Mit Beobachtung 3.28 folgt, dass zwei Rhombentriakontaeder gerade mit 20 flachen und 20 langen Pflastersteinen gefüllt werden können. Da die Lücke im Inneren des langen Steins die Gestalt zweier sich schneidender Rhombentriakontaeder hat, vgl. Beobachtung 3.27, stellt sich die Frage: Welche Steine liegen innerhalb dieses Schnitts? Die Antwort ergibt sich mit einem Blick auf Abbildung 3.67: Dort sehen wir, dass der Schnitt der beiden Rhombentriakontaeder gerade aus einem flachen Stein besteht. Damit folgt insgesamt, dass die Lücke im Inneren des groben langen Steins mit $20 - 1 = 19$ flachen und 20 langen Pflastersteinen gefüllt werden kann.

⁴⁴Umgekehrt folgt aus einer eindeutigen Füllung der Lücke aber noch nicht, dass der grobe lange Pflasterstein auch eine eindeutige Unterteilung besitzt: Es bleibt noch die Frage nach der Füllung der Linsen zu beantworten!

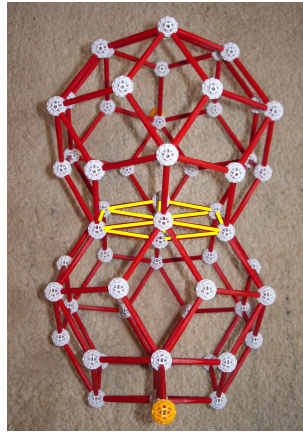


Abbildung 3.67.: Der Schnitt der beiden Rhombentriakontaeder besteht genau aus einem flachen Pflasterstein des feinen Musters SM_E .

□

Doch wie viele Möglichkeiten gibt es, die Lücke im Inneren des groben langen Steins mit eben 19 flachen und 20 langen Pflastersteinen des feinen Musters SM_E zu füllen?

Um dies zu beantworten, muss nun auch für den langen Pflasterstein das bisherige Vorgehen weiter konkretisiert werden: Wir müssen festlegen, von welchen Einheitsrichtungen $\pm v_i$ mit $1 \leq i \leq 6$ der gewählte Stein im groben Muster $M_{E'}$ aufgespannt werden soll. Daran anschließend ist zu klären, welche Gebiete im Fenster V eben diesen Stein auch tatsächlich bilden. Die Vereinigung all dieser Gebiete ist dann wieder genau der Teil des Fensters V im Hilfsraum F , mit dem wir im Folgenden arbeiten.

O. B. d. A. nehmen wir an, dass der lange Pflasterstein im groben Muster $M_{E'}$ ausgehend von einer stumpfen Ecke von den Einheitsrichtungen $-v_2$ und $-v_3$ sowie $+v_6$ aufgespannt wird. Analog zu der bisherigen Notation im Fall des flachen Steins bezeichnen wir auch hier für alle $1 \leq i \leq 6$ die Einheitsrichtungen $\pm \varphi^3 v_i$ im feinen Muster SM_E wieder mit $\pm i$, vgl. Abbildung 3.11 sowie die Bemerkung auf Seite 83.

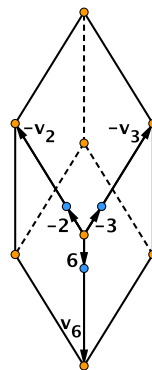


Abbildung 3.68.: Der grobe lange Stein im Muster $M_{E'}$, aufgespannt von den Vektoren $-v_2$ und $-v_3$ sowie $+v_6$, samt den entsprechenden Einheitsrichtungen im feinen Muster SM_E

3. Deflation im Fall von Penrose 3D

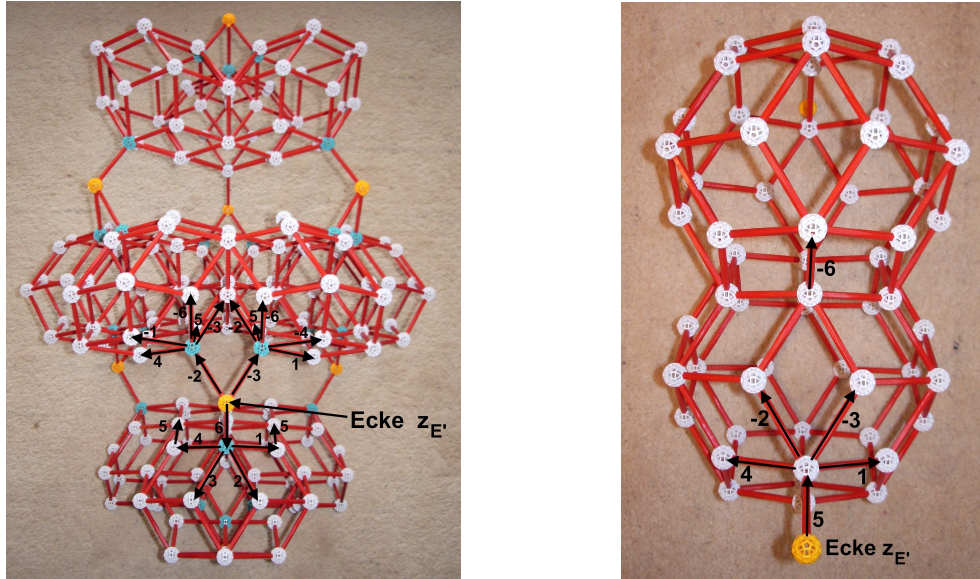


Abbildung 3.69.: Diese Koordinaten ergeben sich für das feine Muster SM_E .

Bemerkung. Im Folgenden gehen wir stets von der in obiger Abbildung mit $z_{E'}$ gekennzeichneten vorderen stumpfen Ecke des groben langen Pflastersteins aus.

Doch welche Gebiete im Fenster V realisieren nun diesen langen Stein mit den von uns gewählten Einheitsrichtungen $-v_2$ und $-v_3$ sowie $+v_6$?

Beobachtung 3.30. *Die Vereinigung V_L aller Gebiete, die den langen Pflasterstein ausgehend von einer stumpfen Ecke mit den Einheitsrichtungen $-v_2$ und $-v_3$ sowie $+v_6$ realisieren, hat selbst die Gestalt eines langen Pflastersteins.*

Beweis. Analog zum Vorgehen im Fall des flachen Steins, vgl. den Beweis zu Beobachtung 3.19, müssen die gesuchten Gebiete des Fensters V im Hilfsraum F die folgenden drei Bedingungen erfüllen:

1. Die Einheitsrichtungen $-w_2$ und $-w_3$ sowie $+w_6$ müssen erlaubt sein.
2. Die Einheitsrichtung $+w_5$ darf nicht existieren.
3. Die Verschiebung dieser Gebiete im Hilfsraum F in Richtung $-w_2$ und $-w_3$ sowie $+w_6$ und $-w_2 + w_6$ sowie $-w_3 + w_6$ und $-w_2 - w_3$ sowie $-w_2 - w_3 + w_6$ muss ebenfalls wieder im Fenster V liegen.

Das in Abbildung 3.70 gezeigte Teilgebiet V_L des Fensters V erfüllt gerade die Bedingungen 1 bis 3 und realisiert somit ausgehend von einer stumpfen Ecke den von uns gewählten langen Pflasterstein mit den Einheitsrichtungen $-v_2$ und $-v_3$ sowie $+v_6$. Dabei hat V_L selbst die Gestalt eines langen Pflastersteins.

Um die Bedingungen 1 und 2 nachzuprüfen, müssen wir wieder mit Hilfe des Analogieprinzips A.6 ermitteln, welche Einheitsrichtungen $\pm w_i$ mit $1 \leq i \leq 6$ in den einzelnen

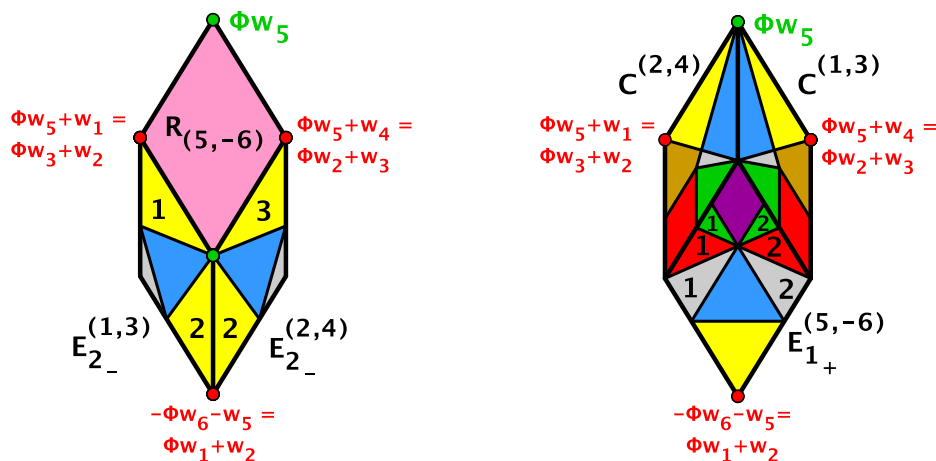


Abbildung 3.70.: Links die Oberseite und rechts die Unterseite des Gebiets V_L . Für die Dodekaederecken sind jeweils nur zwei der drei formal möglichen Schreibweisen angegeben, diese werden im Folgenden benötigt.

Gebieten, die wir in Abbildung 3.70 sehen, jeweils erlaubt sind. Tabelle 3.5 gibt dazu Auskunft. Beachte, dass die Fensterraute $R_{(5,-6)}$ auf der Ebene $A^{(5,-6)}$ liegt, für die Farbwahl der einzelnen Gebietstypen siehe Tabelle 2.2. Entsprechend der Gestalt des Gebiets V_L als der eines langen Pflastersteins bezeichnen wir die vier Begrenzungsflächen auf den Ebenen des Typs \mathcal{C} und \mathcal{E}_{2-} als *Seitenflächen* und die Begrenzungsfläche auf der Ebene $E_{1+}^{(5,-6)}$ als *Grundfläche*.

Ein Vergleich der jeweils erlaubten Einheitsrichtungen zeigt auch hier, dass alle in Tabelle 3.5 genannten Gebiete die Bedingungen 1 und 2 erfüllen. Allerdings gestaltet sich im Fall des langen Pflastersteins die Lage nicht mehr ganz so übersichtlich wie im Fall des flachen Pflastersteins, denn es existieren nun weitaus mehr Gebiete, die den langen Stein theoretisch realisieren können. Es gilt:

Hilfsbeobachtung 5. *Bis auf den Kern von V , das Gebiet Ω_{12} , können theoretisch alle Gebietstypen den langen Pflasterstein, ausgehend von einer stumpfen Ecke, realisieren.*⁴⁵

Beweis. Dies zeigt die Durchsicht der in Tabelle 3.5 ermittelten Gebiete: Es existieren sowohl Gebiete des Typs Ω_4 und Ω_5 sowie Ω_{6a} und Ω_{6b} als auch Gebiete des Typs Ω_7 und Ω_8 sowie Ω_9 und Ω_{10} , welche die Bedingungen 1 und 2 erfüllen und damit den langen Pflasterstein mit den von uns gewählten Einheitsrichtungen $-v_2$ und $-v_3$ sowie $+v_6$, ausgehend von einer stumpfen Ecke, theoretisch realisieren können. \square

⁴⁵Bedingung 3 muss wieder klären, ob sie es denn praktisch auch tun!

3. Deflation im Fall von Penrose 3D

Ebene	Gebiet	Einheitsrichtungen
$A^{(5,-6)}$	Ω_4	$-w_2, -w_3, -w_5, +w_6$
$E_{2-}^{(1,3)}$	$\Omega_5, 1$	$-w_1, -w_2, -w_3, -w_5, +w_6$
$E_{2-}^{(1,3)}$	Ω_{6a}	$-w_1, -w_2, -w_3, -w_4, -w_5, +w_6$
$E_{2-}^{(1,3)}$	Ω_7	$-w_1, \pm w_2, -w_3, -w_4, -w_5, +w_6$
$E_{2-}^{(1,3)}$	$\Omega_5, 2$	$-w_1, -w_2, -w_3, -w_4, +w_6$
$E_{2-}^{(2,4)}$	$\Omega_5, 2$	$-w_1, -w_2, -w_3, -w_4, +w_6$
$E_{2-}^{(2,4)}$	Ω_{6a}	$-w_1, -w_2, -w_3, -w_4, -w_5, +w_6$
$E_{2-}^{(2,4)}$	Ω_7	$-w_1, -w_2, \pm w_3, -w_4, -w_5, +w_6$
$E_{2-}^{(2,4)}$	$\Omega_5, 3$	$-w_2, -w_3, -w_4, -w_5, +w_6$
$C^{(2,4)}$	Ω_5	$-w_2, -w_3, +w_4, -w_5, +w_6$
$C^{(2,4)}$	Ω_{6a}	$+w_1, -w_2, -w_3, +w_4, -w_5, +w_6$
$C^{(2,4)}$	Ω_{6b}	$-w_1, -w_2, -w_3, +w_4, -w_5, +w_6$
$C^{(2,4)}$	Ω_7	$\pm w_1, -w_2, -w_3, +w_4, -w_5, +w_6$
$C^{(2,4)}$	Ω_8	$-w_1, \pm w_2, -w_3, \pm w_4, -w_5, +w_6$
$C^{(2,4)}$	Ω_9	$\pm w_1, \pm w_2, -w_3, \pm w_4, -w_5, +w_6$
$C^{(1,3)}$	Ω_5	$+w_1, -w_2, -w_3, -w_5, +w_6$
$C^{(1,3)}$	Ω_{6a}	$+w_1, -w_2, -w_3, +w_4, -w_5, +w_6$
$C^{(1,3)}$	Ω_{6b}	$+w_1, -w_2, -w_3, -w_4, -w_5, +w_6$
$C^{(1,3)}$	Ω_7	$+w_1, -w_2, -w_3, \pm w_4, -w_5, +w_6$
$C^{(1,3)}$	Ω_8	$\pm w_1, -w_2, \pm w_3, -w_4, -w_5, +w_6$
$C^{(1,3)}$	Ω_9	$\pm w_1, -w_2, \pm w_3, \pm w_4, -w_5, +w_6$
$E_{1+}^{(5,-6)}$	Ω_5	$-w_1, -w_2, -w_3, -w_4, +w_6$
$E_{1+}^{(5,-6)}$	Ω_{6a}	$-w_1, -w_2, -w_3, -w_4, -w_5, +w_6$
$E_{1+}^{(5,-6)}$	$\Omega_7, 1$	$-w_1, \pm w_2, -w_3, -w_4, -w_5, +w_6$
$E_{1+}^{(5,-6)}$	$\Omega_7, 2$	$-w_1, -w_2, \pm w_3, -w_4, -w_5, +w_6$
$E_{1+}^{(5,-6)}$	$\Omega_8, 1$	$-w_1, \pm w_2, -w_3, \pm w_4, -w_5, +w_6$
$E_{1+}^{(5,-6)}$	$\Omega_8, 2$	$\pm w_1, -w_2, \pm w_3, -w_4, -w_5, +w_6$
$E_{1+}^{(5,-6)}$	$\Omega_9, 1$	$\pm w_1, \pm w_2, -w_3, \pm w_4, -w_5, +w_6$
$E_{1+}^{(5,-6)}$	$\Omega_9, 2$	$\pm w_1, -w_2, \pm w_3, \pm w_4, -w_5, +w_6$
$E_{1+}^{(5,-6)}$	Ω_{10}	$\pm w_1, \pm w_2, \pm w_3, \pm w_4, -w_5, +w_6$

Tabelle 3.5.: Die in den einzelnen Gebieten erlaubten Einheitsrichtungen $\pm w_i$ mit $1 \leq i \leq 6$

Bemerkung. Hier tritt nun der in der Bemerkung auf Seite 106 angesprochene Fall auf, dass eventuell nur ein bestimmter Teil eines Gebiets den gewählten Stein tatsächlich realisiert. Dies zeigt ein Vergleich mit der Gebietseinteilung der Ebene $E_{1+}^{(5,-6)}$, vgl. A.11. Dort sehen wir: Die beiden Gebiete des Typs Ω_8 und Ω_9 existieren über den von uns in Abbildung 3.70 gewählten Teil hinaus und liegen damit nicht vollständig in V_L .

Bemerkung. Tabelle 3.5 nennt nur die Gebiete in V_L , welche an einer der sechs Begrenzungsflächen von V_L angrenzen bzw. davon geschnitten werden. Dies schließt jedoch nicht aus, dass nicht noch weitere Gebiete im Inneren von V_L existieren! Da jedoch alle Gebiete in Tabelle 3.5 die Bedingungen 1 und 2 erfüllen und V_L zusammenhängend ist, wissen wir nach Konstruktion des Fensters V , dass auch mögliche weitere Gebiete innerhalb von V_L – und damit ganz V_L – die Bedingungen 1 und 2 erfüllen müssen. Diese Information allein ist für uns ausreichend, denn wir betrachten, wie auch schon im Fall des Gebiets V_F , das Gebiet V_L stets nur als Ganzes: Es ist der Teil des Fensters V , der für die Unterteilung des von uns gewählten langen Pflastersteins tatsächlich betrachtet werden muss!

Bedingung 3 lässt sich ganz analog zum Fall des flachen Steins wieder mit Hilfe der Überlegungen bezüglich der Beobachtungen 1.12 und 1.14 sowie 1.15 berechnen. Exemplarisch wollen wir hier die Verschiebung L in Richtung $-w_2$ und die Verschiebung L' in Richtung $-w_2 + w_6$ zeigen.

In Abbildung 3.70 werden vier der acht Eckpunkte des Gebiets V_L genannt. Die noch fehlenden Eckpunkte, welche die Ober- und Unterseite von V_L gemeinsam haben, sind

$$\Phi w_5 + w_1 - w_5 = -\Phi w_6 - w_4 - w_5 = \Phi w_3 + w_2 - w_5$$

und

$$\Phi w_5 + w_4 - w_5 = -\Phi w_6 - w_1 - w_5 = \Phi w_2 + w_3 - w_5.$$

Der letzte noch unbekannte Eckpunkt der Oberseite von V_L ist $-\Phi w_6$ und der letzte noch unbekannte Eckpunkt der Unterseite von V_L ist $\Phi w_5 - w_5$. Für die vier Eckpunkte der Seitenfläche auf der Ebene $E_{2-}^{(1,3)}$ gilt nun:

$$L(-\Phi w_6) = -\Phi w_6 - w_2 \quad \text{und} \quad L(\Phi w_1 + w_2) = (\Phi w_1 + w_2) - w_2 = \Phi w_1$$

sowie

$$L(\Phi w_3 + w_2) = \Phi w_3 \quad \text{und} \quad L(\Phi w_3 + w_2 - w_5) = \Phi w_3 - w_5$$

und damit wissen wir, dass diese Seitenfläche von V_L unter L auf den Rand des Fensters V – genauer gesagt auf die Fensterraute $R_{(1,3)}$ – abgebildet wird. Die Verschiebung in Richtung $-w_2$ zeigt folglich, warum das Gebiet V_L an dieser Stelle gerade die genannte Seitenfläche auf der Ebene $E_{2-}^{(1,3)}$ besitzen muss und nicht größer oder kleiner sein darf. Die Verschiebung der restlichen fünf Begrenzungsflächen unter L lässt sich völlig analog dazu berechnen. Sie liegt im Inneren des Fensters V .

Mit dem gleichen Vorgehen erhalten wir für einen der vier Eckpunkte der Seitenfläche auf der Ebene $C^{(2,4)}$ unter L' :

$$L'(\Phi w_3 + w_2) = (\Phi w_3 + w_2) - w_2 + w_6 = \Phi w_3 + w_6.$$

3. Deflation im Fall von Penrose 3D

Für die Berechnung der restlichen Eckpunkte ist etwas mehr Aufwand nötig:

$$\begin{aligned}
L'(\Phi w_5) &= L'(\Phi w_3 + w_2 - w_1) \\
&= (\Phi w_3 + w_2 - w_1) - w_2 + w_6 = \Phi w_3 - w_1 + w_6 \\
&= \frac{1}{2}(w_3 + \sum \text{Nachbarecken } (w_3) - 2w_1 + 2w_6) \\
&= \frac{1}{2}\left(w_3 + \underbrace{(w_1 - w_2 - w_4 + w_5 - w_6)}_{\text{Nachbarecken von } +w_3} - 2w_1 + 2w_6\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(-w_4 + \underbrace{(-w_1 - w_2 + w_3 + w_5 + w_6)}_{\text{Nachbarecken von } -w_4}\right) = -\Phi w_4
\end{aligned}$$

und damit folgt

$$L'(\Phi w_5 - w_5) = L'(\Phi w_5) - w_5 = -\Phi w_4 - w_5.$$

Schließlich gilt für den vierten Eckpunkt

$$\begin{aligned}
L'(\Phi w_3 + w_2 - w_5) &= (\Phi w_3 + w_2 - w_5) - w_2 + w_6 = \Phi w_3 - w_5 + w_6 \\
&= \frac{1}{2}(w_3 + \sum \text{Nachbarecken } (w_3) - 2w_5 + 2w_6) \\
&= \frac{1}{2}\left(w_3 + \underbrace{(w_1 - w_2 - w_4 + w_5 - w_6)}_{\text{Nachbarecken von } +w_3} - 2w_5 + 2w_6\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(-w_2 + \underbrace{(w_1 + w_3 - w_4 - w_5 + w_6)}_{\text{Nachbarecken von } -w_2}\right) = -\Phi w_2
\end{aligned}$$

und daher wird die Seitenfläche auf der Ebene $C^{(2,4)}$ unter L' ebenfalls auf den Rand des Fensters V – genauer gesagt auf die Fensterraute $R_{(-2,-4)}$ – abgebildet. Die Verschiebung in Richtung $-w_2 + w_6$ ergibt demnach eine weitere Seitenfläche von V_L , die Verschiebung der restlichen fünf Begrenzungsflächen unter L' liegt wieder im Inneren des Fensters V .

Analog zu diesem Vorgehen ergeben die Verschiebungen in Richtung $-w_3$ und $-w_3 + w_6$ die übrigen beiden Seitenflächen von V_L , und die Verschiebung in Richtung $-w_2 - w_3 + w_6$ zeigt schließlich, warum die Ebene $E_{1+}^{(-5,6)}$ die Grundfläche von V_L bilden muss: V_L kann damit maximal die Gestalt eines langen Pflastersteins besitzen, denn wäre V_L größer, dann läge die Verschiebung in mindestens eine der genannten Richtungen nicht mehr im Fenster V , was im Widerspruch zu Bedingung 3 steht!⁴⁶ \square

Bevor wir uns mit diesem Ergebnis wieder der Lücke im Inneren des groben langen Pflastersteins zuwenden, ist es auch hier hilfreich, sich mit den Symmetrien des langen Steins vertraut zu machen.

⁴⁶Die Verschiebung in Richtung $-w_2 - w_3$ liegt ganz im Inneren des Fensters V . Natürlich ist es aber auch notwendig, dies nachzuprüfen!

Beobachtung 3.31. *Der lange Pflasterstein besitzt die folgenden Symmetrien:*

- *Er ist punktsymmetrisch zum Mittelpunkt seiner Diagonalen.*
- *Er ist drehsymmetrisch um einen Winkel von 120° um seine lange Diagonale.*
- *Er ist spiegelsymmetrisch zu drei Ebenen. Nach Wahl der Koordinaten sind das die Spiegelebene $S_{(1,3)}$ durch die Einheitsrichtungen $\pm v_1$ und $\pm v_3$, die Spiegelebene $S_{(2,4)}$ durch die Einheitsrichtungen $\pm v_2$ und $\pm v_4$ sowie die Spiegelebene $S_{(5,6)}$ durch die Einheitsrichtungen $\pm v_5$ und $\pm v_6$.*

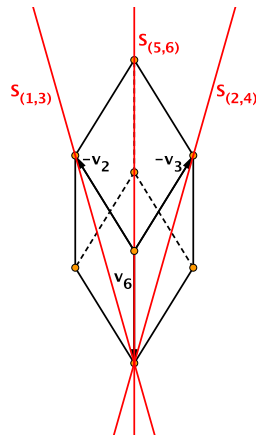


Abbildung 3.71.: Die drei Spiegelebenen $S_{(1,3)}$ und $S_{(2,4)}$ sowie $S_{(5,6)}$ des langen Pflastersteins

Bemerkung. Im Folgenden ist es daher ausreichend, allein das vordere Rhombentriakontaeder zu betrachten. Durch die in Beobachtung 3.31 genannten Symmetrien, genauer gesagt die Punktsymmetrie, lassen sich die Ergebnisse sofort auch auf das hintere Rhombentriakontaeder übertragen!

Um nun die Frage, wie viele Möglichkeiten es dafür gibt, die Lücke im Inneren des groben langen Pflastersteins mit insgesamt 19 flachen und 20 langen Steinen des feinen Musters SM_E zu füllen, vollständig beantworten zu können, sind neben der soeben getroffenen Festlegung auf konkrete Einheitsrichtungen noch eine Reihe von Hilfsbeobachtungen notwendig. Es gilt:

Hilfsbeobachtung 6. *Das vordere Rhombentriakontaeder besitzt in seinem Inneren eine feste Struktur aus insgesamt vier langen und vier flachen Pflastersteinen des feinen Musters SM_E . Diese immer existierende Struktur ist symmetrisch bezüglich der Spiegelebene $S_{(5,6)}$.*

Bemerkungen zu Abbildung 3.72:

- Grün markiert sind drei der vier immer existierenden langen Steine. Der vierte lange Stein liegt unterhalb des mit 2 gekennzeichneten langen Steins.

3. Deflation im Fall von Penrose 3D

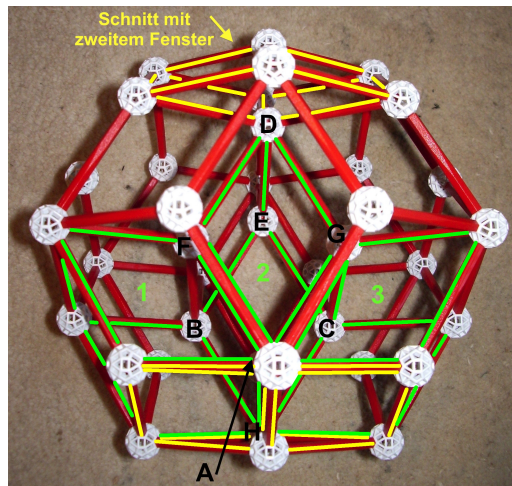


Abbildung 3.72.: Die feste Struktur im Inneren des vorderen Rhombentriakontaeders

- Gelb markiert sind zwei der vier immer existierenden flachen Steine. Der hintere dieser beiden Steine ist gerade der in Abbildung 3.67 gezeigte flache Stein im Schnitt der beiden Rhombentriakontaeder. Zwei weitere flache Steine liegen unterhalb der mit 1 und 3 gekennzeichneten langen Steine.
- An drei der Seitenflächen des mit 2 markierten langen Steins grenzt jeweils ein konvexes gleichseitiges Polyeder an. Dieses besteht aus zwölf Goldenen Rauten und soll im Folgenden *Minilins* (B_{12} , siehe [C],[MT]) genannt werden.

Bemerkung. Die Minilinsen sind eine entscheidende Hilfe in Bezug auf die Frage nach der Füllung des vorderen Rhombentriakontaeders: Ist nämlich Hilfsbeobachtung 6 gezeigt, muss nur noch geklärt werden, wie die drei Minilinsen mit langen und flachen Pflastersteinen des feinen Musters SM_E gefüllt werden können! Da wir jedoch bereits wissen, dass es bis auf Isomorphie nur genau eine Möglichkeit gibt, ein Rhombentriakontaeder mit langen und flachen Pflastersteinen zu füllen, und die Minilinsen Teil eines solchen Rhombentriakontaeders sind, ist klar, dass auch in Bezug auf die Minilinsen eine bis auf Isomorphie eindeutige Füllung existieren muss, vgl. Hilfsbeobachtung 7.

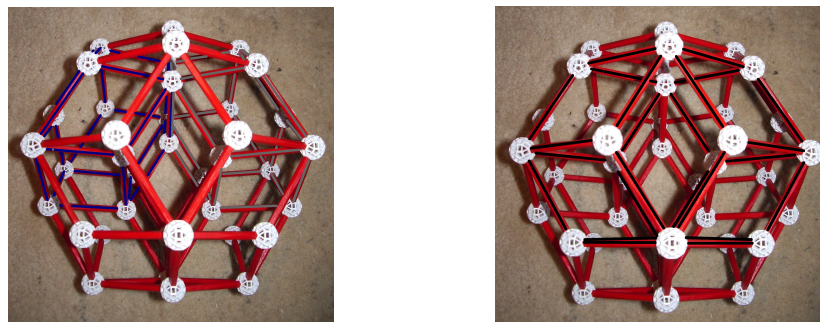


Abbildung 3.73.: Die drei Minilinsen im vorderen Rhombentriakontaeder: links in blau und grau markiert, rechts mit schwarz gekennzeichnet

Beweis. Damit eine feste Struktur im Inneren des vorderen Rhombentriakontaeders existieren kann, muss es Punkte im Inneren dieses Rhombentriakontaeders geben, die immer existieren und einen eindeutigen Eckentyp besitzen.

In Abbildung 3.72 sehen wir die Punkte A bis G , welche – anders als Punkt H – allesamt im Inneren des vorderen Rhombentriakontaeders liegen. Tabelle 3.6 nennt die Koordinaten dieser Punkte gemäß der von uns getroffenen Festlegung. Ausgangspunkt ist dabei stets die in Abbildung 3.69 gekennzeichnete vordere stumpfe Ecke $z_{E'}$ des langen Steins, denn von eben dieser Ecke aus wurde der grobe lange Stein aufgespannt! Wollen wir

Punkt	Koordinaten
A	$5, 1, 4$
B	$5, 1, 4, -2, 6$
C	$5, 1, 4, -3, 6$
D	$5, 1, 4, -2, -3$
E	$5, 1, 4, -2, -3, 6$
F	$5, 1, 4, -2$
G	$5, 1, 4, -3$

Tabelle 3.6.: Die Koordinaten der Punkte im Inneren des vorderen Rhombentriakontaeders, siehe Abbildung 3.72

also zeigen, dass die behauptete feste Struktur im Inneren des vorderen Rhombentriakontaeders existiert, so müssen wir mit Hilfe der bisherigen Methoden, vgl. den Beweis zu Beobachtung 3.20, durch die Bestimmung der Eckenumgebung der Punkte A bis G gerade diese eindeutigen Punkte im Inneren des vorderen Rhombentriakontaeders finden!

Konkret bedeutet dies: Wollen wir beispielsweise wissen, welchen der Eckentypen ω_j mit $j = 4, 5, 6_a, 6_b, 7, 8, 9, 10, 12$ der Punkt A annehmen kann, so müssen wir mittels der Zerlegung der Einheitsvektoren in ihre jeweilige Lateral- und Höhenkomponente, vgl. A.3, das um den Faktor φ^3 verkleinerte Gebiet V_L in Richtung $-w_5 - w_1 - w_4$ verschieben und überprüfen, welche der Gebiete Ω_j mit $j = 4, 5, 6_a, 6_b, 7, 8, 9, 10, 12$ im Fenster V von dieser Verschiebung überlagert werden. Auf diese Weise erhalten wir sofort die möglichen Eckentypen dieses Punktes. Wollen wir zusätzlich wissen, welche Einheitsrichtungen $\pm\varphi^3 v_i$ mit $1 \leq i \leq 6$ im feinen Muster SM_E die ermittelten Eckentypen des Punktes A konkret erlauben, so müssen wir noch die Abbildung S auf die Ergebnisse anwenden, vgl. (3.1).

Der Übersicht halber werden nun auch in diesem Fall lediglich die Ergebnisse, nicht aber die Konstruktionen gezeigt. Für die Punkte A und B sowie C und D im Inneren des vorderen Rhombentriakontaeders erhält man mit dem angesprochenen Vorgehen die in Abbildung 3.74 dargestellte Situation: Die Punkte A und B sowie C sind jeweils Ecken des Typs ω_5 , der Punkt D dagegen ist stets eine Ecke des Typs ω_{6b} .⁴⁷ Wir haben

⁴⁷Die Punkte B und C sind symmetrisch bezüglich der in Beobachtung 3.31 genannten Spiegelebene $S_{(5,6)}$. Es ist daher ausreichend, die Eckenumgebung von einem der beiden Punkte zu bestimmen, die

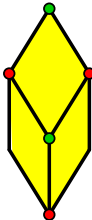
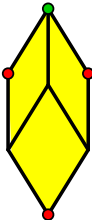
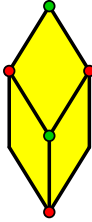
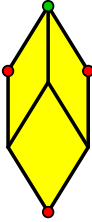
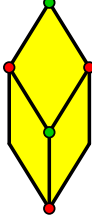

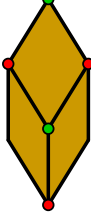

	Oberseite V_L	Unterseite V_L	Erlaubte Einheitsrichtungen
Punkt A = Punkt 5,1,4			-1,-2,-3,-4,6
Punkt B = Punkt 5,1,4,-2,6			-1,2,-3,5,-6
Punkt C = Punkt 5,1,4,-3,6			-2,3,-4,5,-6
Punkt D = Punkt 5,1,4,-2,-3			-1,2,3,-4,5,6

Abbildung 3.74.: Diese Punkte innerhalb des vorderen Rhombentriakontaeders besitzen einen eindeutigen Eckentyp.

damit vier Punkte im Inneren des vorderen Rhombentriakontaeders gefunden, die immer existieren und einen eindeutigen Eckentyp besitzen. Aus den Eckenbildern der Punkte A bis D folgt nun sofort die Existenz der restlichen drei Punkte im Inneren des vorderen Rhombentriakontaeders, der Punkte E und F sowie G . Unter Berücksichtigung von Beobachtung 3.10 erhält man schließlich die in Abbildung 3.72 dargestellte feste Struktur im Inneren des vorderen Rhombentriakontaeders. □

Fassen wir das bisherige Wissen zusammen, so gilt:

(3.2) *Vorderes Rhombentriakontaeder = feste Struktur + drei Minilinsen,*

wobei die feste Struktur aus insgesamt vier langen und vier flachen Pflastersteinen des feinen Musters SM_E besteht.

Damit ist nur noch zu klären, wie die drei Minilinsen im Inneren des vorderen Rhombentriakontaeders mit langen und flachen Pflastersteinen des feinen Musters SM_E gefüllt werden können. Gemäß der Bemerkung auf Seite 140 ist das folgende Ergebnis keine Überraschung mehr:

Hilfsbeobachtung 7. *Es existieren genau zwei Möglichkeiten, eine Minilinse mit langen und flachen Pflastersteinen zu füllen. Diese sind jedoch isomorph zueinander und es gilt:*

$$\text{Minilinse} = 2 \text{ lange Steine} + 2 \text{ flache Steine}.$$

Beweis. Die Minilinse ist ebenfalls eines der fünf Goldenen Isozonoeder. Auf Grund ihrer Gestalt wird sie auch Rhombendodekaeder genannt und in der Terminologie Coxeters mit B_{12} bezeichnet, siehe den Beweis zu Beobachtung 3.13. Wiederum nach Coxeter gilt: $B_{12} = 2A_6 + 2O_6$, wobei A_6 den langen und O_6 den flachen Pflasterstein bezeichnet, siehe [C],[MT],[S3] sowie Seite 14 und 15. □

Analog zum Fall der Linsen stellt sich also auch hier die Frage: Wie viele der theoretisch möglichen Füllungen werden im Einzelnen für jede der drei Minilinsen tatsächlich realisiert? Des Weiteren ist zu untersuchen, wie die unterschiedlichen Füllmöglichkeiten für die drei Minilinsen zusammenhängen: Existieren diese unabhängig voneinander oder nicht? Dies ist deshalb wichtig, da es ja letztlich um die Anzahl der zueinander isomorphen Füllmöglichkeiten des vorderen Rhombentriakontaeders insgesamt geht.⁴⁸

Doch wann ist die Füllung einer Minilinse eindeutig festgelegt? Anders als im Fall der Linsen wollen wir hierzu nicht die Punkte im Inneren der Minilinsen auf ihre Eckenumgebung hin untersuchen, sondern Punkte, die das Gehäuse der Minilinse bilden. Es gilt:

Eckenumgebung des anderen Punktes folgt dann durch Spiegelung der entsprechenden Gebietsbilder!

⁴⁸Auf Grund der vorhandenen Symmetrien entscheidet somit diese Frage nach der Unabhängigkeit der Füllmöglichkeiten der drei Minilinsen im vorderen Rhombentriakontaeder darüber, wie viele Füllmöglichkeiten es für die Lücke im Inneren des groben langen Steins insgesamt gibt!

3. Deflation im Fall von Penrose 3D

Hilfsbeobachtung 8. Die Kenntnis des Eckentyps eines der vier in Abbildung 3.75 hervorgehobenen Punkte lässt eindeutig auf die Füllung der Minilinese, d. h. auf die Anordnung der beiden langen und flachen Pflastersteine des feinen Musters SM_E im Inneren der Minilinese, schließen:

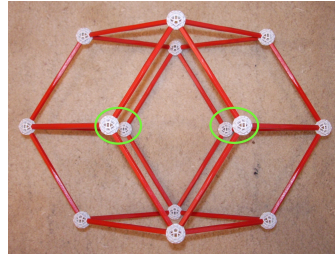


Abbildung 3.75.: Die Kenntnis des Eckentyps eines der vier grün umrandeten Punkte legt das Innere der Minilinese eindeutig fest.

Beweis. Betrachten wir exemplarisch die hintere linke Ecke der vier grün umrandeten Punkte, auf Grund der in Beobachtung 3.31 genannten Symmetrien gelten die diese Ecke betreffenden Überlegungen auch für die übrigen drei Punkte. Von der gewählten Ecke aus gibt es theoretisch die drei folgenden Möglichkeiten für eine weitere Kante, die ins Innere der Minilinese ragt:

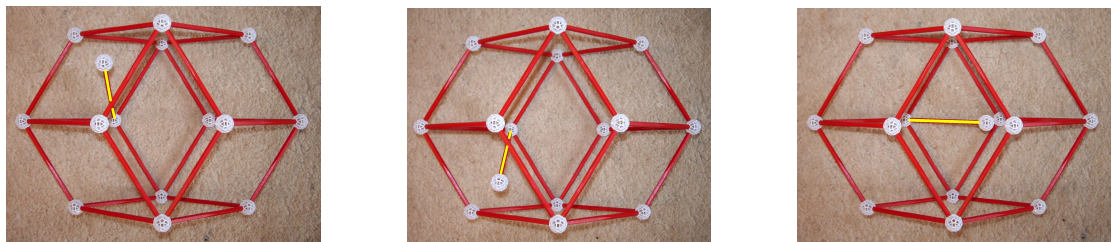


Abbildung 3.76.: Diese drei Möglichkeiten, jeweils gelb markiert, gibt es, dass von der gewählten Ecke aus eine Kante ins Innere der Minilinese ragt.

Die ersten beiden Möglichkeiten scheiden jedoch aus, denn die dort theoretisch mögliche Kante führt praktisch zu einem Widerspruch: Es kann in beiden Fällen keiner der beiden Pflastersteine des feinen Musters SM_E gebildet werden, siehe dazu das linke Bild in Abbildung 3.77. Die dritte Möglichkeit führt dagegen zu einer der beiden zueinander isomorphen Füllungen der Minilinese: Die blau markierten Kanten im rechten Bild in Abbildung 3.77 müssen nach Beobachtung 3.10 existieren, und damit ist das Innere der Minilinese bereits eindeutig bestimmt.

Da nur eine der drei genannten Möglichkeiten zielführend ist, stellt sich die Frage, ob eventuell auch mehrere Kanten von der gewählten Ecke aus ins Innere der Minilinese ragen könnten, erst gar nicht! Als ein Letztes bleibt daher noch der Fall zu klären, was passiert, wenn von der gewählten Ecke aus überhaupt keine der in Abbildung 3.76 gezeigten paarweise benachbarten Kanten ins Innere der Minilinese zeigt. Der Vergleich

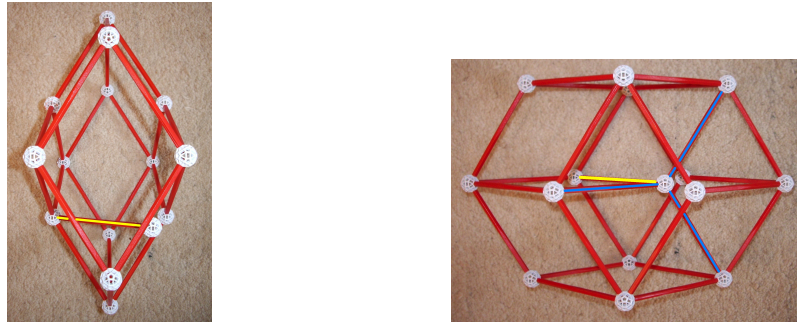


Abbildung 3.77.: Das linke Bild zeigt die Minilinse um 90° im Raum gedreht und veranschaulicht den beschriebenen Widerspruch. Das rechte Bild zeigt die angesprochenen blau markierten Kanten und damit die Füllung der Minilinse, welche die dritte Möglichkeit erzwingt.

mit der schematischen Darstellung der Pflastersteine in Abbildung 1.11 macht klar: In diesem Fall muss an der gewählten Ecke ein flacher Pflasterstein des feinen Musters SM_E mit seiner stumpfen Ecke anliegen, eine andere Möglichkeit gibt es nicht. Dieser flache Stein, in Abbildung 3.78 gelb markiert, erzwingt nun aber wegen Beobachtung 3.10 die drei übrigen Steine im Inneren der Minilinse, und wir erhalten auf diese Weise die zweite Füllmöglichkeit der Minilinse:

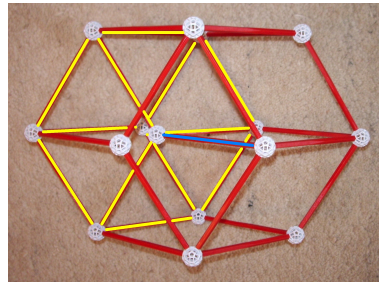


Abbildung 3.78.: Der erzwungene flache Pflasterstein des feinen Musters SM_E . Die blau markierte Kante existiert auf Grund von Beobachtung 3.10 und damit ist das Innere der Minilinse eindeutig festgelegt.

Kennen wir nun den genauen Eckentyp ω_j mit $j = 4, 5, 6_a, 6_b, 7, 8, 9, 10, 12$ eines der vier in Abbildung 3.75 grün umrandeten Punkte, so wissen wir damit insbesondere, ob eine Kante von dieser Ecke aus ins Innere der Minilinse ragt oder nicht. Wie gezeigt, ist dieses Wissen jedoch gerade ausreichend, um die Füllung der Minilinse eindeutig festzulegen – Beobachtung 3.10 war diesbezüglich wieder eine entscheidende Hilfe! \square

Durch Betrachtung der Eckenbilder der Punkte E und F sowie G , vgl. Abbildung 3.72, kann damit die Frage nach der Anzahl und Unabhängigkeit der Füllmöglichkeiten der drei Minilinsen im Inneren des vorderen Rhombentriakontaeders geklärt werden.

Hilfsbeobachtung 9. *Es existieren genau drei zueinander isomorphe Möglichkeiten, die drei Minilinsen im Inneren des vorderen Rhombentriakontaeders mit langen und flachen Pflastersteinen des feinen Musters SM_E zu füllen.*

3. Deflation im Fall von Penrose 3D

Beweis. Auf Grund von Hilfsbeobachtung 8 und der Tatsache, dass die Punkte E und F sowie G jeweils Teil des Gehäuses von zwei der drei Minilinsen im vorderen Rhombentriakontaeder sind, vgl. Abbildung 3.72, gilt:

- Das Eckenbild des Punktes E legt die Füllungen der in Abbildung 3.73 blau und grau markierten Minilinsen eindeutig fest.
- Das Eckenbild des Punktes F legt die Füllungen der in Abbildung 3.73 blau und schwarz markierten Minilinsen eindeutig fest.
- Das Eckenbild des Punktes G legt die Füllungen der in Abbildung 3.73 grau und schwarz markierten Minilinsen eindeutig fest.

Genau genommen benötigen wir damit nur die Eckenbilder von zwei dieser drei Punkte, der Vollständigkeit halber werden jedoch alle drei Bilder gezeigt. Mit dem gleichen Vorgehen wie im Beweis zu Hilfsbeobachtung 6 bzw. im Beweis zu Beobachtung 3.20 erhalten wir für die Punkte E und F sowie G :⁴⁹

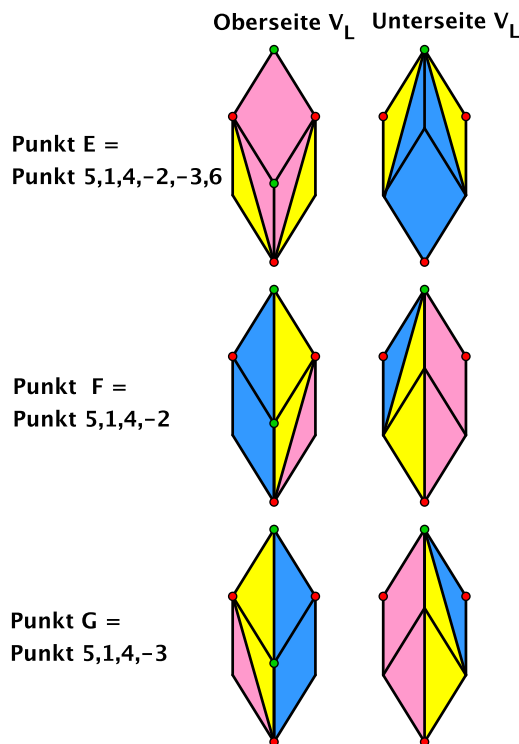


Abbildung 3.79.: Diese Punkte sind für die Füllungen der Minilinsen im vorderen Rhombentriakontaeder verantwortlich, vgl. Abbildung 3.72.

Die Punkte E und F sowie G können demnach allesamt Ecken des Typs ω_4 und ω_5 sowie ω_{6a} sein. Insgesamt zerfällt das Gebiet V_L in die folgenden sechs Teilgebiete:

⁴⁹Beachte: Hier sind nun die Punkte F und G spiegelsymmetrisch bezüglich $S_{(5,6)}$. Das bedeutet, dass das Gebietsbild des einen Punktes sofort durch Anwendung der genannten Spiegelung aus dem des anderen Punktes gewonnen werden kann!

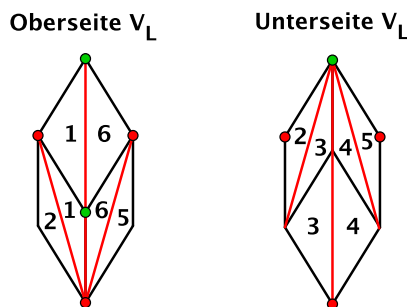


Abbildung 3.80.: In diese Teilgebiete zerfallen die Eckenbilder der Punkte E und F sowie G .

Auf Grund von Beobachtung 1.20 ist es im Fall des langen Steins nun jedoch ausreichend, nur genau die Hälfte des Gebiets V_L zu betrachten. O. B. d. A. legen wir uns daher im Weiteren auf die folgende Einschränkung $V_{L'}$ fest:

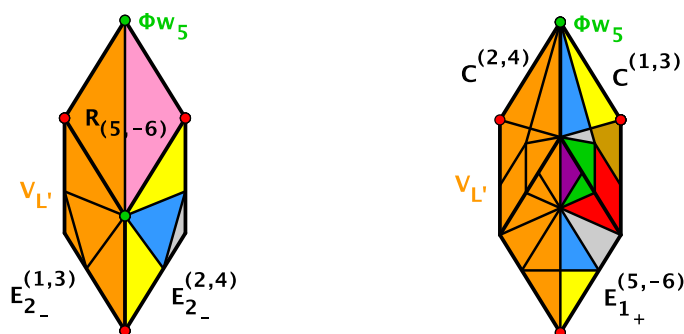


Abbildung 3.81.: Die Einschränkung $V_{L'}$ des Gebiets V_L auf die Hälfte des Gesamtgebiets

In Bezug auf die Einschränkung $V_{L'}$ erhalten wir: Die Eckenbilder der Punkte E und F sowie G zerfallen in die mit 1 bis 3 gekennzeichneten drei Teilgebiete. Da sich nun bei einem Wechsel von einem der Teilgebiete in ein anderes mindestens einer der Eckentypen der Punkte E und F sowie G ändert, ändert sich auch mindestens eine der Füllungen der drei Minilinsen.⁵⁰ Damit gibt es insgesamt genau drei verschiedene Möglichkeiten, die drei Minilinsen im vorderen Rhombentriakontaeder mit jeweils zwei langen und zwei flachen Pflastersteinen des feinen Musters SM_E zu füllen. Die Füllmöglichkeiten der drei Minilinsen sind demzufolge nicht völlig unabhängig voneinander! \square

Mit den Hilfsbeobachtungen 6 bis 9 wissen wir nicht nur, mit welchen Pflastersteinen des feinen Musters SM_E das vordere Rhombentriakontaeder gefüllt wird, sondern auch, wie viele Möglichkeiten es für eine solche Füllung gibt. Wie bereits erwähnt, lassen sich auf Grund der in Beobachtung 3.31 genannten Symmetrien des langen Pflastersteins diese

⁵⁰Die Kanten, die von den Punkten E und F sowie G aus existieren, teilen sich gerade auf in Kanten, die immer existieren und Teil der in Hilfsbeobachtung 6 beschriebenen festen Struktur im vorderen Rhombentriakontaeder sind, und Kanten, die existieren können, aber nicht müssen. Letztere bestimmen gerade die Füllung der entsprechenden Minilinsen!

3. Deflation im Fall von Penrose 3D

Ergebnisse unmittelbar auch auf das hintere Rhombentriakontaeder übertragen. Für die Lücke im Inneren des groben langen Pflastersteins folgt somit insgesamt, siehe (3.2):

$$(3.3) \quad \text{Lücke} = \text{feste Struktur} + \text{sechs Minilinsen},$$

wobei sich die feste Struktur in diesem Fall gerade aus acht langen und sieben flachen Pflastersteinen des feinen Musters SM_E zusammensetzt.⁵¹

Schließlich erhalten wir damit auch die Antwort auf die Ausgangsfrage nach der Anzahl der Möglichkeiten, die Lücke im Inneren des groben langen Steins mit 19 flachen und 20 langen Pflastersteinen des feinen Musters SM_E zu füllen:

Beobachtung 3.32. *Es existieren genau drei zueinander isomorphe Möglichkeiten, die Lücke im Inneren des groben langen Pflastersteins mit 19 flachen und 20 langen Steinen des feinen Musters SM_E zu füllen.*

Beweis. Auf Grund der in Beobachtung 3.31 genannten Punktsymmetrie besitzt nicht nur das vordere Rhombentriakontaeder genau drei zueinander isomorphe Möglichkeiten, die drei Minilinsen in seinem Inneren mit langen und flachen Pflastersteinen des feinen Musters SM_E zu füllen, sondern auch das hintere Rhombentriakontaeder, vgl. Hilfsbeobachtung 9. Die Frage ist nur, wie sich diese Füllungen zueinander verhalten: Treten sie unabhängig voneinander auf oder nicht? Für die Füllung der drei Minilinsen im hinteren Rhombentriakontaeder sind dabei die zu E und F sowie G punktsymmetrischen Punkte E' und F' sowie G' verantwortlich, und deren Gebietsbilder erhält man theoretisch durch Punktspiegelung der schon bekannten Gebietsbilder der Punkte E und F sowie G . Da nun aber der Schnitt dieser drei Gebietsbilder punktsymmetrisch ist, vgl. Abbildung 3.80, folgt sofort, dass durch die Hinzunahme der Punkte E' und F' sowie G' insgesamt keine weiteren Teilgebiete hinzukommen. Es existieren damit für die gesamte Lücke im Inneren des groben langen Steins nur drei zueinander isomorphe Füllmöglichkeiten, d. h. die Füllungen der Minilinsen im vorderen und hinteren Rhombentriakontaeder treten nicht unabhängig voneinander auf! \square

Mit diesem Ergebnis ist klar: Auch im Fall des langen Pflastersteins gibt es keine völlig eindeutige Unterteilung! Als ein letzter Punkt bleibt noch die Frage nach der Füllung der Linsen im Fall des langen Pflastersteins zu klären.

Die Füllung der Linsen

Theoretisch gibt es nach Beobachtung 3.13 auch für den langen Pflasterstein stets zehn zueinander isomorphe Möglichkeiten, eine Linse mit jeweils fünf langen und fünf flachen Pflastersteinen des feinen Musters SM_E zu füllen. Doch wie viele dieser Linsenfüllungen existieren für jede der zwölf Linsen tatsächlich? Diese Antwort war bezüglich des flachen Steins nicht einheitlich, sondern abhängig von den verschiedenen Linsen. Wie ist die Lage hier im Fall des langen Pflastersteins?

⁵¹Ein flacher Stein der festen Struktur der beiden Rhombentriakontaeder liegt gerade im Schnitt dieser beiden Rhombentriakontaeder, vgl. Abbildung 3.67, daher sind es insgesamt nur sieben flache Steine des feinen Musters SM_E .

Beobachtung 3.33. Die Füllung der Linsen im langen Pflasterstein ist nicht einheitlich. Genauer:

- Die vier inneren und zwei äußeren Linsen, welche gemeinsam den Linsenring in der Mitte des langen Pflastersteins bilden, besitzen je drei Füllungen.
- Die zwei übrigen inneren Linsen realisieren je fünf Füllmöglichkeiten.
- Die restlichen vier äußeren Linsen erlauben stets alle zehn theoretisch möglichen Füllungen.

Beweis. Der Beweis verläuft völlig analog zu dem im Fall des flachen Pflastersteins, beachte insbesondere die exemplarischen Erläuterungen zu Abbildung 3.44. Auch für den langen Pflasterstein werden allein die Ergebnisse, nicht aber die Konstruktionen gezeigt.

Betrachten wir zunächst die Gebietsbilder aller innerhalb der Linse 1 möglichen Punkte. Im Unterschied zu Linse 1 des flachen Steins gibt es hier nun sechs Punkte, welche

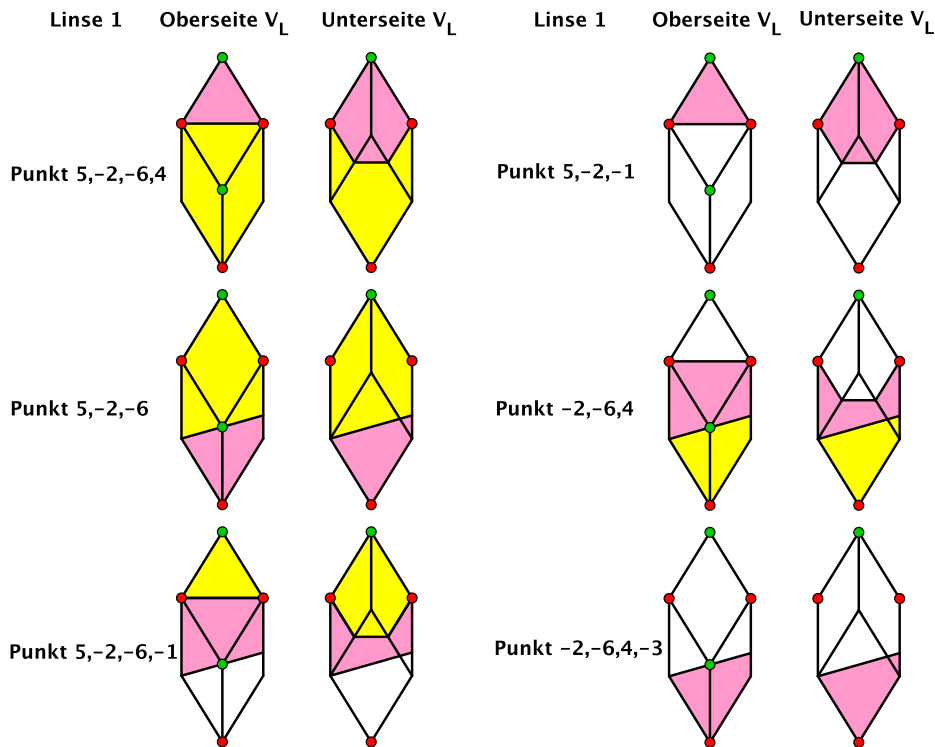


Abbildung 3.82.: Die Eckenumgebung aller in Linse 1 möglichen Punkte im Muster SM_E

im Inneren dieser Linse existieren können. Die Vereinigung V_L aller Gebiete, die den von uns gewählten Pflasterstein realisieren, zerfällt damit bezüglich der in Abbildung 3.82 gezeigten Gebietsbilder aller Punkte im Inneren von Linse 1 in die folgenden drei Teilgebiete:

3. Deflation im Fall von Penrose 3D

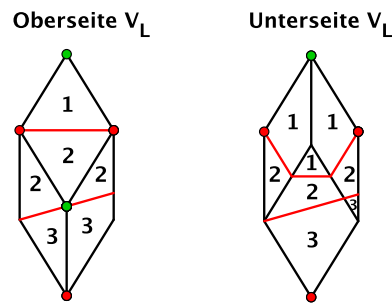


Abbildung 3.83.: Bezüglich des Gebiets V_L existieren für Linse 1 drei Teilgebiete.

Wie bereits im Beweis zu Hilfsbeobachtung 9 geschehen, siehe insbesondere Seite 147, reicht es aus, nur die in Abbildung 3.81 festgelegte Einschränkung $V_{L'}$ des Gebiets V_L zu betrachten. Ein Blick auf Abbildung 3.84 zeigt jedoch, dass diese Einschränkung hier keinen Gewinn bringt hinsichtlich einer möglichen Reduzierung der Teilgebiete, denn auch $V_{L'}$ zerfällt in drei Teilgebiete.

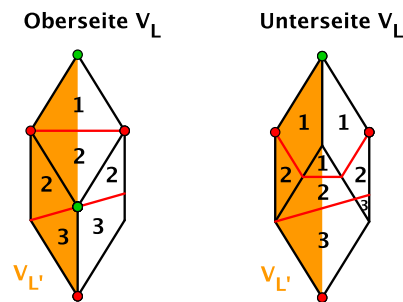


Abbildung 3.84.: Bezüglich der Einschränkung $V_{L'}$ existieren für Linse 1 ebenfalls drei Teilgebiete.

Da nun die Anzahl der Teilgebiete einer Linse gerade Auskunft gibt über die Anzahl der Füllmöglichkeiten dieser Linse, werden im Fall von Linse 1 somit drei der zehn zueinander isomorphen Möglichkeiten, eine Linse mit fünf flachen und fünf langen Pflastersteinen des feinen Musters SM_E zu füllen, tatsächlich realisiert.

Mit Hilfe der in Beobachtung 3.31 genannten Symmetrien lassen sich diese Ergebnisse auf die restlichen drei inneren Linsen des Linsenrings in der Mitte des langen Pflastersteins übertragen. Dies sind die Linsen 2 und 4 sowie die Linse 5, vgl. Abbildung 3.21. Es gilt:

$$\text{Linse 1} \xrightarrow{\text{Spiegelung an } S_{(5,6)}} \text{Linse 4} \xrightarrow{\text{punktsymmetrisch}} \text{Linse 2} \xrightarrow{\text{Spiegelung an } S_{(5,6)}} \text{Linse 5}$$

Wenden wir diese Symmetrien auf Abbildung 3.83 an, so erhalten wir für die genannten Linsen die folgenden Teilgebiete:

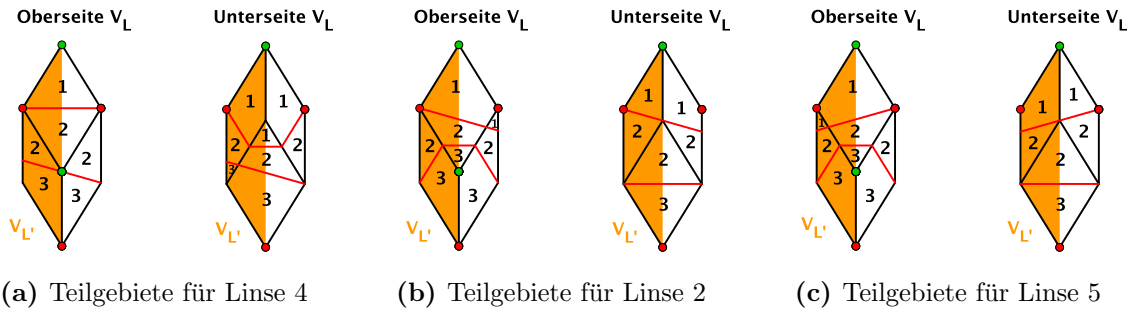


Abbildung 3.85.: Bezüglich der Einschränkung $V_{L'}$ existieren für Linse 4 und Linse 2 sowie Linse 5 jeweils drei Teilgebiete.

Damit ist klar, dass auch für die Linsen 2 und 4 sowie 5 je drei Füllmöglichkeiten realisiert werden, denn auch in diesen Fällen bringt die Einschränkung auf $V_{L'}$ keine Reduzierung der Teilgebiete. Für Linse 8 erhalten wir die folgenden Gebietsbilder:

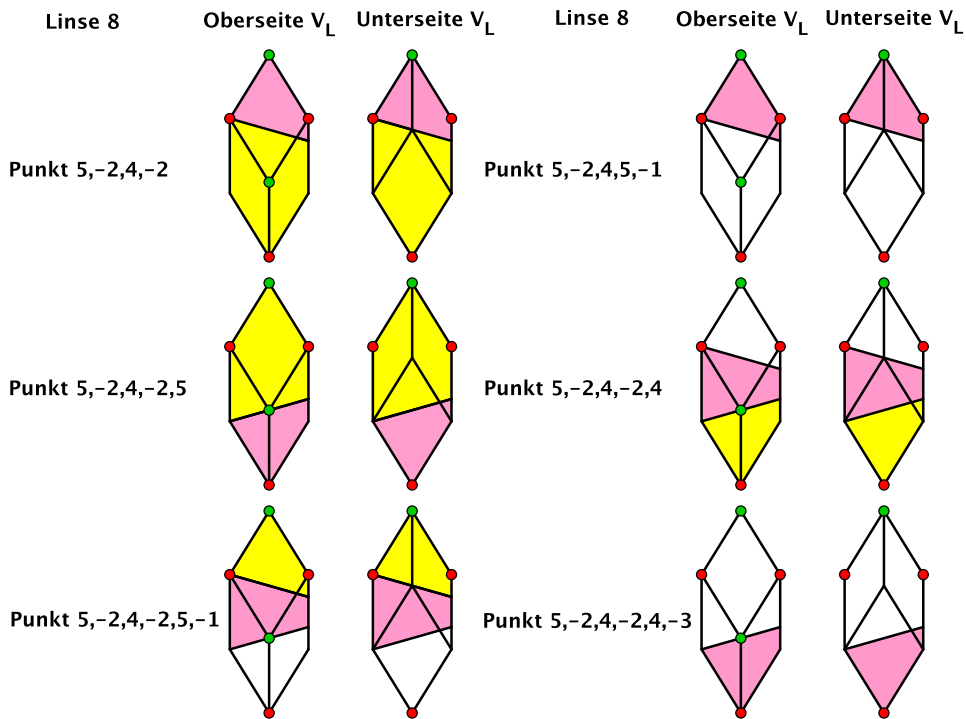


Abbildung 3.86.: Die Eckenumgebung aller in Linse 8 möglichen Punkte im Muster SM_E

Demnach existieren für Linse 8 sowie die dazu spiegelsymmetrische Linse 11 ebenfalls je drei Teilgebiete. Da jedoch auch in diesem Fall die Einschränkung auf $V_{L'}$ keine weitere Reduzierung der Teilgebiete mit sich bringt, vgl. Abbildung 3.87, besitzen die beiden äußeren Linsen des Linsenrings ebenso je drei Füllmöglichkeiten.

3. Deflation im Fall von Penrose 3D

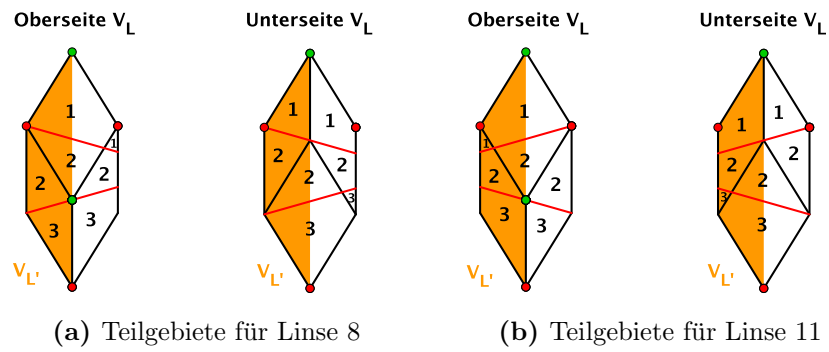


Abbildung 3.87.: Bezüglich der Einschränkung $V_{L'}$ existieren für Linse 8 und Linse 11 jeweils drei Teilgebiete.

Für Linse 6 ergeben sich die in Abbildung 3.88 dargestellten Gebietsbilder:

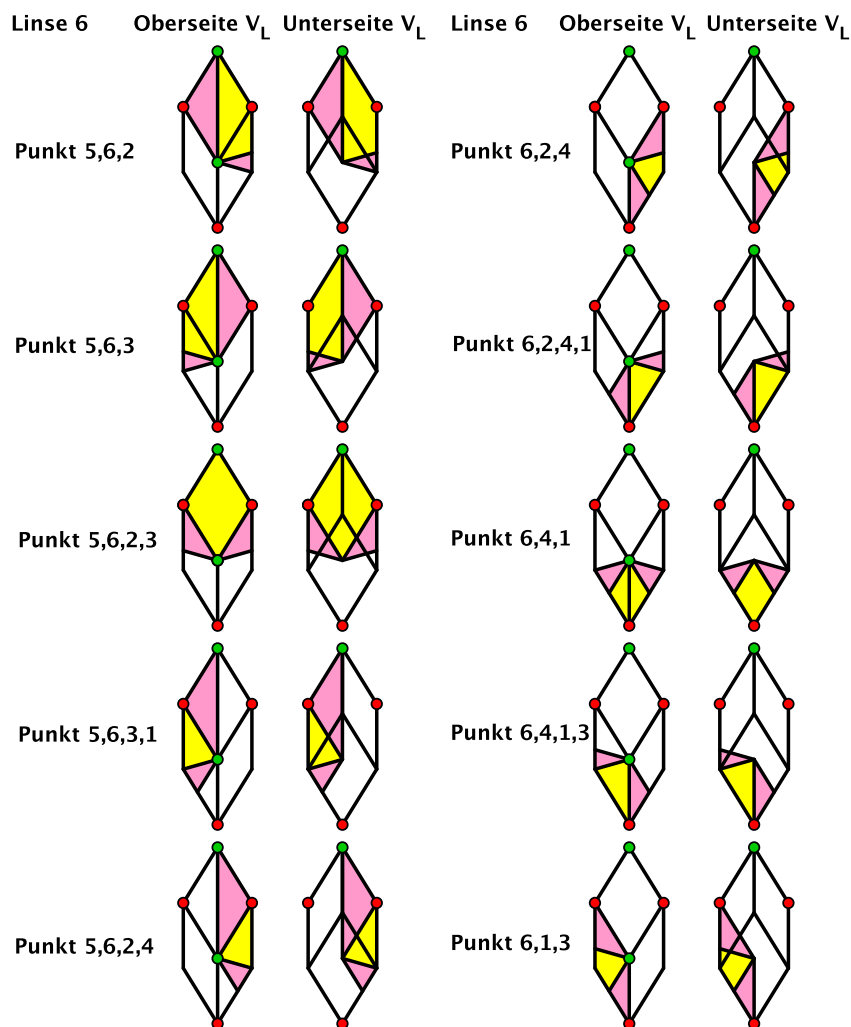


Abbildung 3.88.: Die Eckenumgebung aller in Linse 6 möglichen Punkte im Muster SM_E

Wir sehen: Der Schnitt der Gebietsbilder aller innerhalb von Linse 6 existierenden Punkte zerfällt in zehn Teilgebiete, siehe Abbildung 3.89. Allerdings bringt in diesen Fall nun die Einschränkung auf $V_{L'}$ tatsächlich eine Reduzierung der Teilgebiete mit sich: In Bezug auf die in Abbildung 3.81 festgelegte Einschränkung $V_{L'}$ existieren nur fünf der insgesamt zehn Teilgebiete. Damit realisieren Linse 6 und die dazu punktsymmetrische Linse 3 nur jeweils fünf der theoretisch zehn Füllmöglichkeiten.

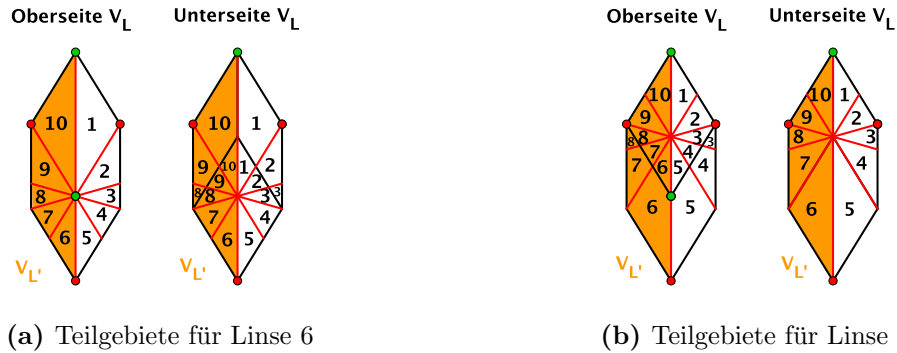


Abbildung 3.89.: Bezüglich der Einschränkung $V_{L'}$ existieren für Linse 6 und Linse 3 jeweils fünf Teilgebiete.

Im Fall der Linse 7 gestaltet sich die Situation schließlich weitaus unübersichtlicher, siehe Abbildung 3.90. Es ist alles andere als sofort erkennbar, wie der Schnitt aller innerhalb der Linse 7 möglichen Punkte aussieht, d. h. in welche Teilgebiete das Gebiet V_L bzw. dessen Einschränkung $V_{L'}$ zerfällt. Für ein besseres Verständnis gibt Tabelle 3.7 wieder Auskunft darüber, welche der Punkte für die einzelnen Teilgebiete stets existieren. Eine genaue Betrachtung liefert das in Abbildung 3.91 gezeigte Ergebnis:

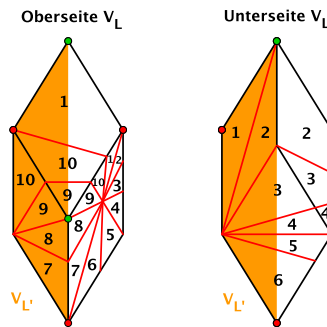


Abbildung 3.91.: Bezüglich der Einschränkung $V_{L'}$ existieren für Linse 7 zehn Teilgebiete.

Sowohl das Gebiet V_L als auch dessen Einschränkung $V_{L'}$ zerfallen bezüglich Linse 7 in zehn Teilgebiete und somit realisiert diese Linse auch wirklich alle zehn möglichen Linsenfüllungen. Wegen

$$\text{Linse 7} \xrightarrow{\text{Spiegelung an } S_{(5,6)}} \text{Linse 12} \xrightarrow{\text{punktsymmetrisch}} \text{Linse 9} \xrightarrow{\text{Spiegelung an } S_{(5,6)}} \text{Linse 10}$$

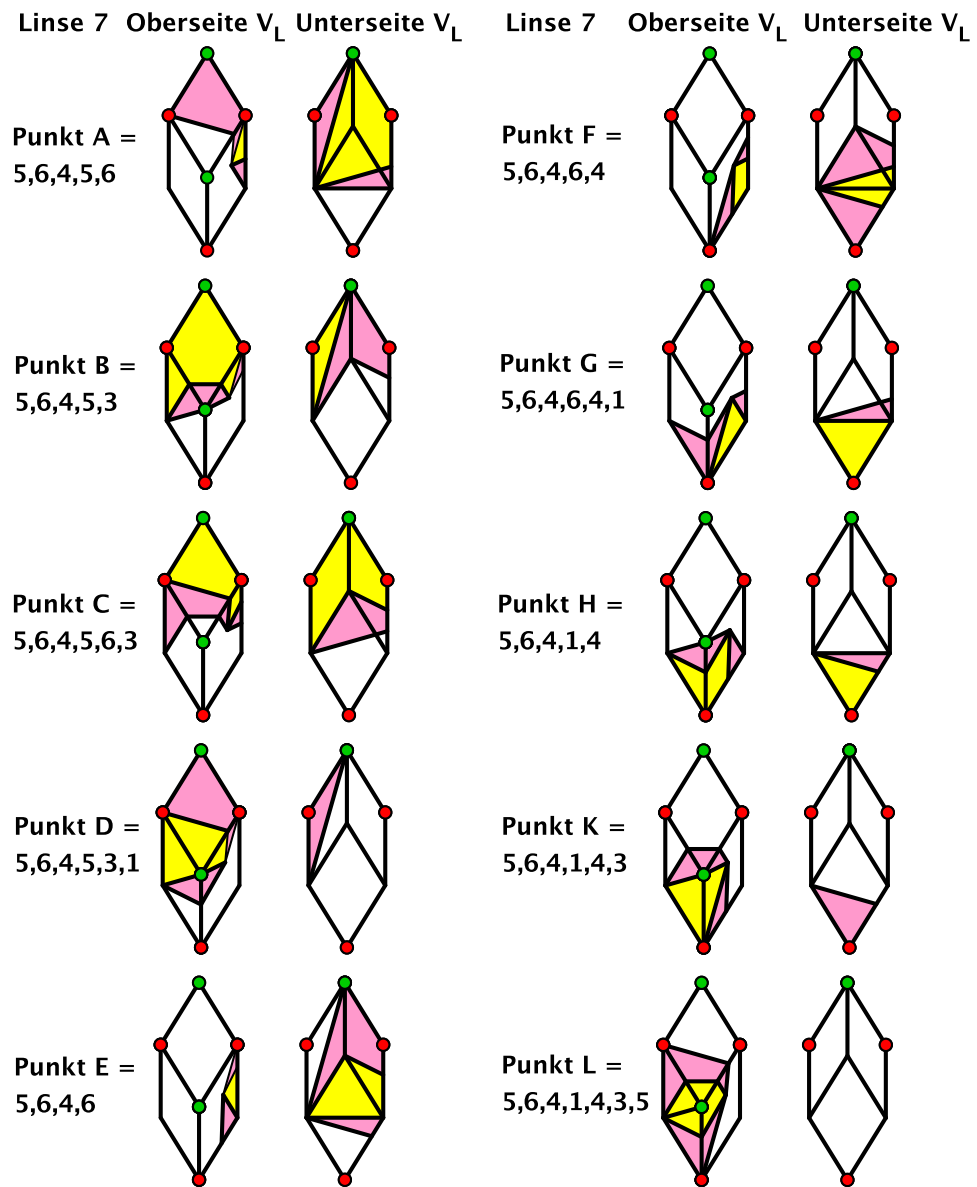


Abbildung 3.90.: Die Eckenumgebung aller in Linse 7 möglichen Punkte im Muster SM_E

Teilgebiet	Ecken des Typs ω_4	Ecken des Typs ω_5
1	Punkt A und Punkt D	Punkt B und Punkt C
2	Punkt B und Punkt E	Punkt A und Punkt C
3	Punkt C und Punkt F	Punkt A und Punkt E
4	Punkt A und Punkt G	Punkt E und Punkt F
5	Punkt E und Punkt H	Punkt F und Punkt G
6	Punkt F und Punkt K	Punkt G und Punkt H
7	Punkt G und Punkt L	Punkt H und Punkt K
8	Punkt D und Punkt H	Punkt K und Punkt L
9	Punkt B und Punkt K	Punkt D und Punkt L
10	Punkt C und Punkt L	Punkt B und Punkt D

Tabelle 3.7.: Die Punkte in den unterschiedlichen Teilgebieten von V_L bezüglich Linse 7

und der Tatsache, dass sowohl die linke Hälfte des Gebiets V_L , also die von uns festgelegte Einschränkung $V_{L'}$, als auch die rechte Hälfte des Gebiets V_L in Bezug auf Linse 7 jeweils in zehn Teilgebiete zerfallen, folgt nun aber für die restlichen drei äußeren Linsen, Linse 12 und Linse 9 sowie Linse 10, sofort und ohne detaillierte Betrachtung der entsprechenden Bilder, dass auch in diesen Fällen jeweils alle zehn Füllmöglichkeiten existieren.

Insgesamt ergibt sich damit die Situation wie in Abbildung 3.92 dargestellt, und Behauptung 3.33 ist folglich gezeigt. Schwarz markiert ist entsprechend Abbildung 3.21 wieder die Nummerierung der Linsen, der rot gekennzeichnete Index einer jeden Linse nennt die soeben ermittelte Anzahl der möglichen Füllungen für diese Linse. Schränkt man sich nicht wie in Abbildung 3.81 festgelegt auf die linke, sondern die rechte Hälfte von V_L ein, so ändern sich in diesem Fall die Aussagen für die Linsen 1 bis 12 nicht.

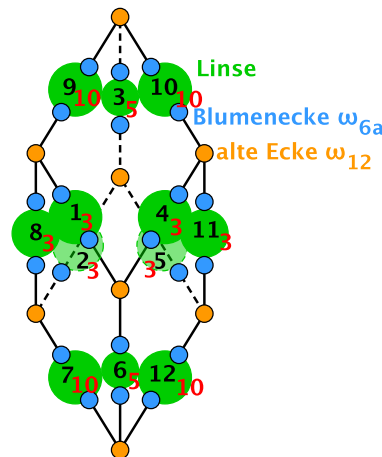


Abbildung 3.92.: Die Anzahl der Linsenfüllungen des langen Pflastersteins

□

3. Deflation im Fall von Penrose 3D

Abschließend soll auch hier noch die Anzahl der Pflastersteine, die den langen Stein im Deflationsfall unterteilen, ermittelt werden, vgl. [O1],[O2]. Mit den Beobachtungen 3.13 und 3.25 sowie 3.26 und 3.29 ergibt sich:

Beobachtung 3.34. *Der lange Stein des groben Musters $M_{E'}$ wird mit 55 langen und 34 flachen Pflastersteinen des feinen Musters SM_E ausgefüllt.*

Beweis. Der Beweis verläuft analog zur Unterteilung des flachen Steins, vgl. Beobachtung 3.24 und insbesondere die Bemerkungen zu Abbildung 3.58. Die Unterteilung des groben langen Steins setzt sich nach unseren Ergebnissen zusammen aus:

- langen Pflastersteinen, die um jede alte Ecke ω_{12} herum anliegen. Hier klären nun die Beobachtungen 3.25 und 3.26, wie viele dieser insgesamt 20 langen Steine um jede alte Ecke jeweils auch tatsächlich im Inneren des langen Steins liegen.
- der Lücke im Inneren des Steins. Diese ist mit insgesamt 20 langen und 19 flachen Pflastersteinen gefüllt, siehe Beobachtung 3.29.
- den Linsen, für die es nach Beobachtung 3.13 eine bis auf Isomorphie eindeutige Füllung, bestehend aus 5 langen und 5 flachen Pflastersteinen, gibt.

Auch hier ist nun zu klären, welcher Teil der Linsen jeweils ins Innere des langen Pflastersteins ragt.

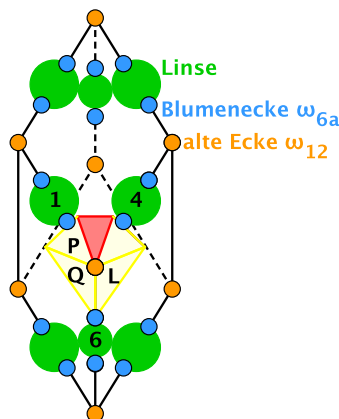


Abbildung 3.93.: Schematische Darstellung des unterteilten langen Pflastersteins. Der Übersicht halber sind nicht alle Blumenecken und auch nicht alle Linsen eingezeichnet.

Bemerkungen zu Abbildung 3.93:

- Nach Beobachtung 3.26 wissen wir, dass an jeder der sechs stumpfen Ecken des langen Steins jeweils ein ganzer und vier halbe lange Pflastersteine im Inneren dieses Steins liegen. Für eine der Ecken ist diese Konstellation in Abbildung 3.93 eingezeichnet: Rot markiert ist dabei der Pflasterstein ganz im Inneren des langen Steins, gelb markiert sind die vier Pflastersteine, die jeweils zur Hälfte im Inneren des langen Steins liegen.

3.5. Die Festlegung auf einen Pflasterstein

- Für Linse 1 gilt: Die Grundseite des rot markierten Steins, die Teil des Gehäuses dieser Linse ist, liegt ganz im Inneren des langen Steins, die Grundseite des mit P gekennzeichneten Steins, die Teil des Gehäuses von Linse 1 ist, liegt dagegen nur zur Hälfte im Inneren des langen Steins.
- Die Grundseiten der mit Q und L markierten Steine, die Teil des Gehäuses von Linse 6 sind, liegen ebenso nur zur Hälfte im Inneren des langen Steins.
- Damit wissen wir, dass Linse 1 zu $\frac{3}{10}$ im Inneren des langen Steins liegt, Linse 6 dagegen nur zu $\frac{2}{10}$. Unter Berücksichtigung der Symmetrien des langen Steins, vgl. Beobachtung 3.31, können wir dieses Ergebnis auf alle übrigen stumpfen Ecken des langen Steins übertragen, d. h. die Linsen 2 und 4 sowie 5 und 8 sowie 11 ragen jeweils zu $\frac{3}{10}$ ins Innere des langen Steins, die Linsen 3 und 7 sowie 9 und 10 sowie 12 jeweils zu $\frac{2}{10}$.

Bezeichnet L wieder den langen und F wieder den flachen Stein, so erhalten wir für die Anzahl A_L der langen und flachen Pflastersteine des feinen Musters SM_E im Inneren des groben langen Steins:

$$\begin{aligned}
 A_L &= \underbrace{6 \cdot (L + 4 \cdot \frac{1}{2} L)}_{\text{stumpfe Ecken}} + \underbrace{2 L}_{\text{spitze Ecken}} + \underbrace{20 L + 19 F}_{\text{Lücke}} \\
 &+ \underbrace{6 \cdot \left(\frac{2}{10} (5 L + 5 F) \right)}_{\text{Linsen 3,6,7,9,10,12}} + \underbrace{6 \cdot \left(\frac{3}{10} (5 L + 5 F) \right)}_{\text{Linsen 1,2,4,5,8,11}} = 55 L + 34 F.
 \end{aligned}$$

□

4. Zusammenfassung der Ergebnisse

Welches sind also die Ergebnisse dieser Arbeit? Um das dreidimensionale Penrose-Muster mittels Projektionsmethode zu erzeugen, ordnen wir im \mathbb{R}^{12} den zwölf Ecken des Ikosaeders die zwölf Basisvektoren $a_1, \dots, a_6, b_1, \dots, b_6$ zu, wobei b_i für alle $1 \leq i \leq 6$ die Antipodenecke von a_i ist. Auf diese Weise erreicht man eine rationale Zerlegung des \mathbb{R}^{12} in die Unterräume $W = \text{Spann} \{e_i := a_i - b_i\} \cong \mathbb{R}^6$ und $W' = \text{Spann} \{f_i := a_i + b_i\} \cong \mathbb{R}^6$, welche beide invariant sind unter der Ikosaedergruppe G , die ihrerseits isomorph zu der alternierenden Gruppe A_5 ist, siehe Beobachtung 1.3. Der Unterraum W kann mit Hilfe der symmetrischen Abbildung $S = 2I - U|_W$ mit $U|_W(e_i) = \sum \text{Nachbarecken}(e_i)$ und $1 \leq i \leq 6$ in zwei weitere unter G invariante Unterräume zerlegt werden: den Eigenraum F zum Eigenwert $\Phi^3 = 2 + \sqrt{5}$ sowie den dazu senkrecht stehenden Eigenraum E_0 zum Eigenwert $-\varphi^3 = 2 - \sqrt{5}$, vgl. Beobachtung 1.4.⁵² Anders als im ersten Fall ist diese Spaltung reell. Wird als Ausgangsraum für die Projektionsmethode der sechsdimensionale Raum W , als Hilfsraum der Eigenraum $F \cong \mathbb{R}^3$ und als Projektionsraum der um einen dreidimensionalen Vektor $a \in F$ verschobene Eigenraum $E = E_0 + a \cong \mathbb{R}^3$ gewählt, so kann die Abbildung S als Inflationsabbildung fungieren. Um das dreidimensionale Penrose-Muster M_E zu erhalten, werden nun gerade alle ganzzahligen Gitterpunkte $z \in \mathbb{Z}^6$ innerhalb des Streifens $E + I^6 \subset \mathbb{R}^6$ projiziert: Die Pflastersteine sind die Projektionen der dreidimensionalen Seiten des sechsdimensionalen Einheitswürfels I^6 auf E .

Doch welche dreidimensionalen Seiten des sechsdimensionalen Einheitswürfels gibt es und wie sieht jeweils deren Projektion auf E aus? Die Projektionen der Einheitsvektoren e_1, \dots, e_6 des Ausgangsraums W auf die beiden Räume E und F sind in beiden Fällen

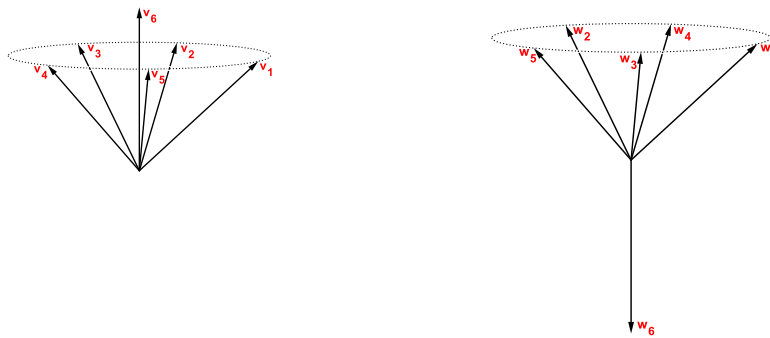


Abbildung 4.1.: Links die Projektion $\pi_E(e_i) = v_i$ der Einheitsvektoren e_i des Ausgangsraums W auf E und rechts die Projektion $\pi_F(e_i) = w_i$ der Einheitsvektoren auf F , wobei $1 \leq i \leq 6$

⁵²I bezeichnet dabei die Einheitsmatrix im \mathbb{R}^6 und $\Phi := \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ den Goldenen Schnitt mit $\varphi = \frac{1}{\Phi}$.

4. Zusammenfassung der Ergebnisse

wieder Ikosaederecken, genügen jedoch in E einer anderen Anordnung als in F , vgl. die Beobachtungen 1.5 und 1.6 sowie 1.10 und 1.11. Um nun die Gestalt der Pflastersteine, d. h. die Gestalt der Projektionen der dreidimensionalen Seiten von I^6 auf E , zu ermitteln, ist demnach wegen der Linearität der Projektionsabbildung zu klären, welche Kombinationen von je drei beliebigen Ikosaederecken es gibt und wie jeweils deren Aufspann aussieht. Beobachtung 1.9 hilft diesbezüglich weiter: Im Fall des dreidimensionalen Penrose-Musters existieren zwei Sorten von Pflastersteinen, ein langer und ein flacher Stein. Beides sind gleichseitige Hexaeder mit der Goldenen Raute als Grundseite.⁵³

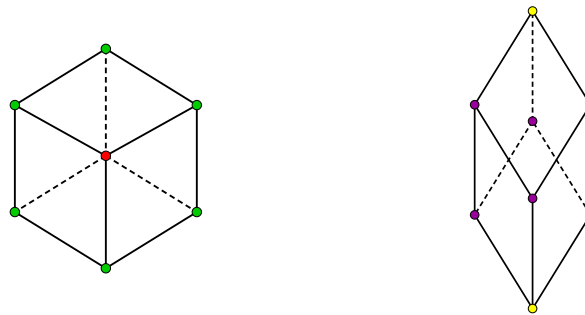


Abbildung 4.2.: Die beiden Pflastersteine im Fall des dreidimensionalen Penrose-Musters: links der flache Stein und rechts der lange Stein. Beachte dabei, dass in der Darstellung des flachen Pflastersteins die beiden roten Ecken zusammenfallen.

Der Streifen $E + I^6 \subset \mathbb{R}^6$ kann mit Hilfe der orthogonalen Projektion π_F auf den Hilfsraum F noch auf eine andere Weise beschrieben werden: $E + I^6 = E + V$ mit $V := \pi_F(I^6)$, genannt Fenster, vgl. (1.12). Der große Gewinn dieser alternativen Streifenbeschreibung liegt darin, dass die zu betrachtenden Dimensionen reduziert werden, denn das Fenster V als Teil des dreidimensionalen Hilfsraums F ist unserer Vorstellung zugänglich, der sechsdimensionale Einheitswürfel I^6 dagegen nicht. Als Projektion des konvexen sechsdimensionalen Einheitswürfels auf den Hilfsraum F ist V selbst wieder ein konvexes Polyeder, genauer ein Rhombentriakontaeder, d. h. ein gleichseitiges Polyeder mit 30 Seiten, 32 Eckpunkten und 60 Kanten, wobei die Grundseite ebenfalls eine Goldene Raute ist, vgl. Beobachtung 1.18.

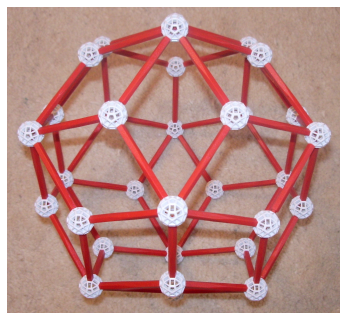


Abbildung 4.3.: Das Fenster V im Hilfsraum F hat die Gestalt eines Rhombentriakontaeders.

⁵³Bei einer Goldenen Raute teilen sich die Diagonalen im Verhältnis des Goldenen Schnitts.

Zusammenfassend ergeben sich damit die folgenden wichtigen Äquivalenzen, vgl. die Kriterien 2.1 und 2.2, wobei $\pm v_i = \pm \pi_E(e_i)$ sowie $\pm w_i = \pm \pi_F(e_i)$ für alle $1 \leq i \leq 6$ und $z_E = \pi_E(z)$ sowie $z_F = \pi_F(z)$ mit $z \in \mathbb{Z}^6$:

1. z_E ist Teil des Musters $M_E \iff z \in (E + I^6) \subset \mathbb{R}^6 \iff z_F \in V$
2. $z_E \pm v_i$ ist Teil des Musters $M_E \iff z \pm e_i \in (E + I^6) \subset \mathbb{R}^6 \iff z_F \pm w_i \in V$

Das Fenster V ist folglich mehr als nur ein Streifenersatz: Es liefert ein Entscheidungskriterium dafür, welche der Nachbarpunkte $z \pm e_i$ eines Gitterpunktes $z \in (E + I^6) \subset \mathbb{R}^6$ mit $1 \leq i \leq 6$ ebenfalls auf E projiziert werden, d. h. Teil des Musters M_E sind, und welche nicht. Umgekehrt können wir somit fragen: Wo im Fenster V muss der Projektionspunkt z_F eines Gitterpunktes z liegen, damit neben z auch der Nachbarpunkt $z + e_k$ mit $e_k \in \{\pm e_1, \dots, \pm e_6\}$ auf E projiziert wird? Wir erhalten auf diese Weise die Einteilung des Fensters V in verschiedene Gebiete, welche jeweils eine unterschiedliche Anzahl von Nachbarpunkten erlauben. Kongruenzen sollen dabei nicht unterschieden werden. Nach Beobachtung 2.21 existieren im Fall des dreidimensionalen Penrose-Musters insgesamt neun Gebiete Ω_j mit $j = 4, 5, 6_a, 6_b, 7, 8, 9, 10, 12$ und damit neun nicht-kongruente Konstellationen von erlaubten Nachbarpunkten eines Gitterpunktes $z \in (E + I^6) \subset \mathbb{R}^6$, genannt Eckentypen. Genauer:

$z \in \mathbb{Z}^6 \subset \mathbb{R}^6$ heißt Ecke des Typs $\omega_j \iff z_F \in \Omega_j$ mit $j = 4, 5, 6_a, 6_b, 7, 8, 9, 10, 12$,

wobei der Index stets die Anzahl der erlaubten Nachbarpunkte angibt.⁵⁴ Da wir jedoch entweder im Projektionsraum E oder aber im Hilfsraum F arbeiten und nicht im unanschaulichen Ausgangsraum W , soll ebenso gelten: $z_E \in E$ und $z_F \in F$ heißen Ecke des Typs $\omega_j \iff z_F \in \Omega_j$ mit $j = 4, 5, 6_a, 6_b, 7, 8, 9, 10, 12$.

Um dieses wichtige Resultat zu erreichen, haben wir die einzelnen Gebiete in V nicht in ihrer dreidimensionalen Gestalt konstruiert, sondern eingeschränkt auf bestimmte Ebenen, was den Vorteil mit sich brachte, dass wir im zweidimensionalen Raum arbeiten und damit eine elementargeometrische Konstruktion anwenden konnten. Doch für welche Ebenen, die das Fenster V schneiden, sind die Gebiete zu ermitteln? Schließlich muss sichergestellt sein, dass auch wirklich alle dreidimensionalen Gebiete in V erfasst werden!

Mit Beobachtung 2.10 folgt, dass insgesamt 60 verschiedene Ebenen als Schnittebenen gewählt werden müssen. Auf Grund der besonderen Gestalt des Fensters V als der eines gleichseitigen Polyeders sind jedoch je zwei dieser Ebenen parallel zu einer der 30 Fensterrauten, und damit können die 60 Schnittebenen entsprechend ihrem Abstand zu der jeweils parallelen Fensterraute R in genau zwei Typen klassifiziert werden: in Ebenen des Typs \mathcal{E}_1 und \mathcal{E}_2 . Die Beobachtungen 2.11 und 2.12 nennen darüber hinaus noch eine wichtige Zusatzbedingung: Es ist zwar ausreichend, oben genannte Ebenentypen als Schnittebenen zu wählen, für eine vollständige Bestimmung aller dreidimensionalen

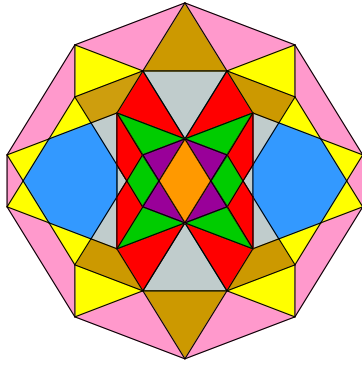
⁵⁴Sind neben $z \in (E + I^6) \subset \mathbb{R}^6$ gerade noch sechs weitere Nachbarpunkte erlaubt, so existieren folglich zwei nicht-kongruente Konstellationen von Nachbarpunkten: die Gebiete des Typs Ω_{6a} und Ω_{6b} .

4. Zusammenfassung der Ergebnisse

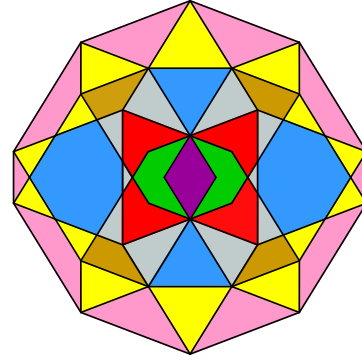
Gebiete im Fenster V muss jedoch die Gebietseinteilung der folgenden Ebenentypen bestimmt werden: $\mathcal{E}_{1-} := \mathcal{E}_1 - \delta$ und $\mathcal{E}_{1+} := \mathcal{E}_k + \delta$ sowie $\mathcal{E}_{2-} := \mathcal{E}_2 - \delta$ und $\mathcal{E}_{2+} := \mathcal{E}_2 + \delta$, wobei $0 < \delta < 1$.⁵⁵

Mit anderen Worten: Die Gebiete Ω'_j auf den Ebenen des Typs $\mathcal{E}_{k\pm}$ mit $k = 1, 2$ sind elementargeometrisch konstruierbar. Wegen $\Omega'_j = \Omega_j \cap \mathcal{E}_{k\pm}$ und mit der Wahl der richtigen Schnittebenen lässt sich die Existenz der dreidimensionalen Gebiete Ω_j in V folgern und damit wissen wir, welche Eckentypen im Fall des dreidimensionalen Penrose-Musters existieren.

Insgesamt erhalten wir so die in den Abbildungen 4.4 und 4.5 dargestellte Situation. Gebiete gleichen Typs sind jeweils in der gleichen Farbe markiert, siehe Tabelle 4.1.

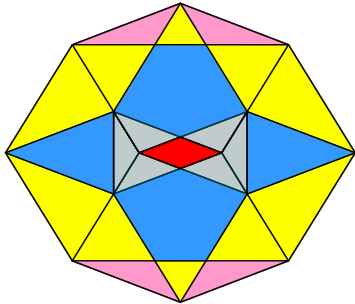


(a) Gebietseinteilung der Ebene des Typs \mathcal{E}_{1-}

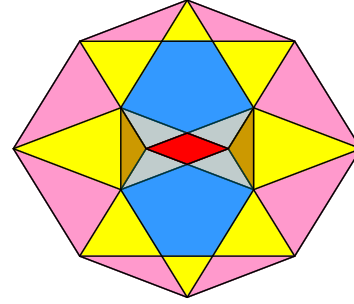


(b) Gebietseinteilung der Ebene des Typs \mathcal{E}_{1+}

Abbildung 4.4.: Die Gebietseinteilungen der Ebenen des Typs \mathcal{E}_{1-} und \mathcal{E}_{1+}



(a) Gebietseinteilung der Ebene des Typs \mathcal{E}_{2-}



(b) Gebietseinteilung der Ebene des Typs \mathcal{E}_{2+}

Abbildung 4.5.: Die Gebietseinteilungen der Ebenen des Typs \mathcal{E}_{2-} und \mathcal{E}_{2+}

⁵⁵Beachte: Ebenen gleichen Typs besitzen die gleiche Gebietsaufteilung, da wir nach Definition Kongruenzen nicht unterscheiden! Gebiete gleichen Typs auf verschiedenen Ebenen unterscheiden sich darin, welche der Einheitsrichtungen $\pm w_i$ mit $1 \leq i \leq 6$ die jeweilige Ecke konkret realisieren.

Gebiet	Farbe	Gebiet	Farbe	Gebiet	Farbe
Ω_4	Rosa	Ω_5	Gelb	Ω_{6a}	Blau
Ω_{6b}	Braun	Ω_7	Grau	Ω_8	Rot
Ω_9	Grün	Ω_{10}	Lila	Ω_{12}	Orange

Tabelle 4.1.: Übersicht über die Farben zur Kennzeichnung der Gebietstypen

Auf diesen Erkenntnissen aufbauend kann schließlich die Frage geklärt werden, was mit dem dreidimensionalen Penrose-Muster unter Deflation geschieht: Gibt es wie im Fall des zweidimensionalen Penrose-Musters eine eindeutige Unterteilung der beiden Pflastersteine, vgl. Abbildung 3 der Einführung, oder nicht? Die Antwort ist gewissermaßen ein eingeschränktes Ja: Es gibt eine feste Struktur, die die Unterteilung bereits zu einem großen Teil eindeutig festlegt. Daneben existieren aber auch Lücken, d. h. Bereiche, innerhalb derer es bestimmte Wahlfreiheiten gibt. Die Lücken haben dabei entweder die Gestalt sogenannter Linsen, i. e. gleichseitige Polyeder bestehend aus zwanzig Goldenen Rauten, oder aber die zweier sich schneidender Rhombentriakontaeder, siehe die Abbildungen 3.20 und 3.65. Letztere sind jedoch noch weiter unterteilt durch insgesamt sechs sogenannte Minilinsen, i. e. gleichseitige Polyeder bestehend aus zwölf Goldenen Rauten, sowie acht lange und sieben flache Pflastersteine, vgl. (3.3). Bis auf Isomorphie gibt es allerdings in beiden Fällen nur genau eine Möglichkeit, die Lücken zu füllen, was bedeutet, dass die genannten Wahlfreiheiten sich auf unterschiedliche Einpassungsmöglichkeiten beschränken. Die Anzahl der langen und flachen Steine, mit denen die Lücken gefüllt werden, ist jeweils eindeutig!⁵⁶

Hinsichtlich der Frage nach einer eindeutigen Unterteilung ist dies einerseits ein erfreuliches Ergebnis: Erstens gibt es eine über große Teile eindeutige Struktur und zweitens besitzen die Lücken eine überschaubare und gut zu beschreibende Gestalt, deren Füllung bis auf Isomorphie ebenfalls eindeutig ist. Andererseits ist damit für jede der genannten Lücken im Einzelnen zu fragen: Wie viele der zueinander isomorphen Füllmöglichkeiten werden tatsächlich realisiert? Das folgende Prinzipbild veranschaulicht die beschriebene Situation. Das zu unterteilende Ausgangsmuster nennen wir dabei grobes Muster, das um den Deflationsfaktor φ^3 verkleinerte „Unterteilungsmuster“ entsprechend feines Muster.

Bemerkungen zu Abbildung 4.6:

- Mit Beobachtung 3.3 folgt, dass die gelb markierten Ecken der groben Pflastersteine allesamt Ecken des Typs ω_{12} im feinen Muster sind. Wir nennen den ersten Deflationszug daher global eindeutig, denn dieses Ergebnis ist sowohl global gültig, also unabhängig von der Wahl eines bestimmten Pflastersteins, als auch eindeutig, da an allen Ecken das Gleiche passiert.
- Die blau markierten Nachbarecken dieser gelben Ecken im feinen Muster sind alle

⁵⁶Nach Coxeter gilt: Bis auf Isomorphie kann jede Linse mit genau fünf langen und fünf flachen Pflastersteinen gefüllt werden und jede Minilinse mit genau zwei langen und zwei flachen Steinen, vgl. Beobachtungen 3.13 sowie Hilfsbeobachtung 7.

4. Zusammenfassung der Ergebnisse

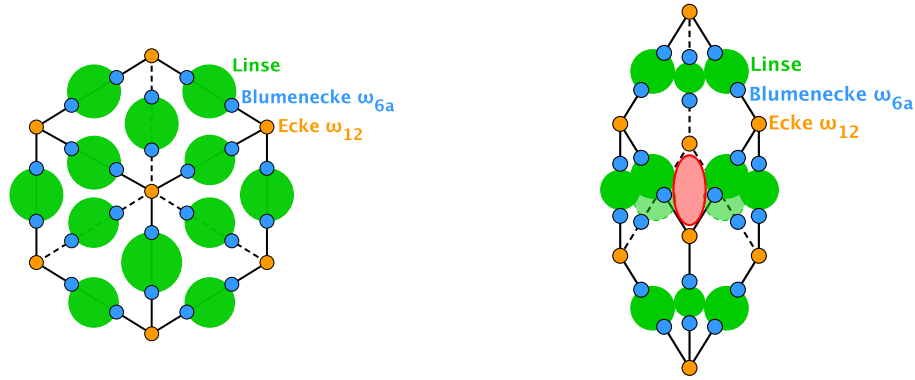


Abbildung 4.6.: Die Unterteilung der beiden Pflastersteine: links der flache und rechts der lange Stein

Ecken des Typs ω_{6a} , vgl. Beobachtung 3.6. Der zweite Deflationszug ist somit ebenfalls global eindeutig.

- Aus den Ergebnissen bezüglich des ersten und zweiten Deflationszugs kann die Existenz der Linsen gefolgert werden. Ein ganz zentraler Punkt ist dabei Beobachtung 3.10: Unterscheiden sich zwei Punkte im dreidimensionalen Penrose-Muster gerade um einen erlaubten Kantenvektor, so sind sie auch durch eine Kante verbunden. Die Füllung der Linsen ist jedoch nicht mehr einheitlich, denn nach Beobachtung 3.8 ist der dritte Deflationszug nicht mehr global eindeutig.
- Mit Hilfe der global eindeutigen Ergebnisse der ersten beiden Deflationszüge weiß man auch, dass um jede gelb markierte Ecke des groben Steins 20 lange Pflastersteine im feinen Muster anliegen, siehe Beobachtung 3.12. Das Innere des flachen Pflastersteins ist damit nach Beobachtung 3.17 bereits eindeutig gefüllt, das Innere des langen Pflastersteins dagegen nicht: Die in obiger Abbildung rot markierte Lücke hat die Gestalt zweier sich schneidender Rhombentriakontaeder, deren Schnitt gerade aus einem flachen Pflasterstein besteht.

Um die noch offene Frage zu klären, wie viele der zueinander isomorphen Möglichkeiten, die einzelnen Lücken mit langen und flachen Pflastersteinen zu füllen, tatsächlich realisiert werden, kann das folgende Vorgehen angewandt werden: O.B.d.A. legen wir uns auf bestimmte Einheitsrichtungen $\pm v_i$ mit $1 \leq i \leq 6$ fest, welche die beiden Pflastersteine im Projektionsraum E ausgehend von einer stumpfen Ecke realisieren. Von eben diesen Ecken aus arbeiten wir uns dann jeweils schrittweise entlang der Kanten des feinen Musters vor: Wie beschrieben sind sowohl der erste als auch der zweite Deflationszug global eindeutig. Wir wissen damit, dass von der gewählten Ausgangsecke aus im feinen Muster alle zwölf möglichen Nachbarpunkte existieren, welche wiederum alle samt Ecken des Typs ω_{6a} sind, was bedeutet, dass von diesen Nachbarpunkten aus nurmehr sechs Einheitsrichtungen erlaubt sind. Bestimmen wir nun die Eckentypen ω_j mit $j = 4, 5, 6_a, 6_b, 7, 8, 9, 10, 12$ dieser übernächsten Nachbarn der gewählten Ausgangsecke,

usw., so gelingt es schließlich, zu den einzelnen Linsen bzw. der Lücke im Inneren des langen Steins „vordringen“ und damit deren Füllmöglichkeiten zu bestimmen.

Unter Rückgriff auf die Überlegungen bezüglich des Fensters V lässt sich auch dieses Problem auf zwei Dimensionen reduzieren und damit elementargeometrisch lösen. Ferner können unter Berücksichtigung der Symmetrien der beiden Pflastersteine Ergebnisse bezüglich eines bestimmten Punktes sofort auf weitere Punkte im feinen Muster übertragen werden. Insgesamt erhalten wir damit die in Abbildung 4.7 gezeigte Situation, wobei die in den einzelnen Lücken stehende Zahl jeweils die Anzahl der tatsächlich realisierten Füllmöglichkeiten angibt.

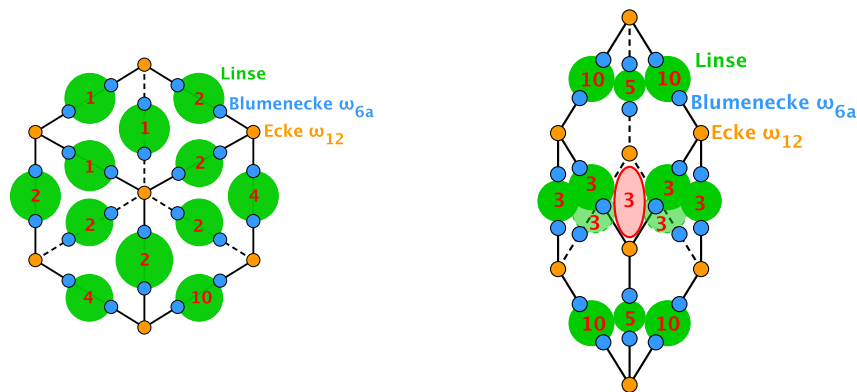


Abbildung 4.7.: Die Anzahl der tatsächlich realisierten Füllmöglichkeiten für den flachen und den langen Stein

Auf Grundlage all dieser Ergebnisse ist es darüber hinaus möglich, die genaue Anzahl der Pflastersteine zu ermitteln, in die der flache und der lange Stein im Deflationsfall unterteilt werden: Der grobe flache Stein wird mit insgesamt 34 langen und 21 flachen Pflastersteinen des feinen Musters ausgefüllt, siehe Beobachtung 3.24, der grobe lange Stein hingegen mit insgesamt 55 langen und 34 flachen Pflastersteinen, vgl. Beobachtung 3.34. Interessant ist, dass es sich hierbei um jeweils aufeinanderfolgende *Fibonacci-Zahlen* handelt.

A. Anhang

A.1. Berechnungen zur Inflationsmatrix S

Wie bereits erwähnt, geht die Wahl der Ikosaederecken a_1, \dots, a_6 entscheidend ein. Die Abbildung $U|_w$ mit $U|_w(e_i) = \sum \text{Nachbarecken}(e_i)$ besitzt für $1 \leq i \leq 6$ bezüglich der in Abbildung 1.4 getroffenen Wahl der Ikosaederecken damit die folgende Abbildungsmatrix, vgl. auch [R]:

$$U|_w = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Wie man nun sofort sieht, ist $U|_w$ und folglich auch die Inflationsmatrix $S = 2I - U|_w$ mit $I = \text{Einheitsmatrix im } \mathbb{R}^6$ symmetrisch, d. h. es existiert eine Orthonormalbasis aus reellen Eigenvektoren, so dass $U|_w$ bzw. S diagonalisierbar ist und die Eigenräume zu verschiedenen Eigenwerten senkrecht aufeinander stehen. Ferner besitzt $U|_w$ und somit auch S nur ganzzahlige Einträge:

$$U|_w \in \mathbb{Z}^{6 \times 6} \quad \text{sowie} \quad S \in \mathbb{Z}^{6 \times 6}.$$

Die Ermittlung der Eigenwerte und Eigenvektoren von $U|_w$

Es sei $\Sigma_6 = \frac{1}{\sqrt{5}}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5)$. Mit Hilfe von Abbildung 1.4 folgt:

$$\begin{aligned} U|_w(e_6) &= \sum \text{Nachbarecken}(e_6) = \sum \text{Nachbarecken}(a_6 - b_6) \\ &= \sum \text{Nachbarecken}(a_6) - \sum \text{Nachbarecken}(b_6) \\ &= (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) - (b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5) \\ &= e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 = \sqrt{5} \Sigma_6. \end{aligned}$$

Ferner gilt

$$\begin{aligned} U|_w(\Sigma_6) &= \frac{1}{\sqrt{5}}(U|_w(e_1) + U|_w(e_2) + U|_w(e_3) + U|_w(e_4) + U|_w(e_5)) \\ &= \sqrt{5} e_6 \end{aligned}$$

A. Anhang

und somit

$$U_{|w}(e_6 + \Sigma_6) = \sqrt{5}(e_6 + \Sigma_6) \quad \text{sowie} \quad U_{|w}(e_6 - \Sigma_6) = -\sqrt{5}(e_6 - \Sigma_6),$$

was bedeutet, dass $U_{|w}$ den Eigenwert $\sqrt{5}$ zum Eigenvektor $e_6 + \Sigma_6$ sowie den Eigenwert $-\sqrt{5}$ zum Eigenvektor $e_6 - \Sigma_6$ besitzt.

Zur Berechnung der weiteren Eigenvektoren bedarf es einiger algebraischer Vorüberlegungen: Bezeichnet ζ eine beliebige fünfte Einheitswurzel, d. h. $\zeta = \exp(\frac{k \cdot 2\pi i}{5})$ mit $1 \leq k \leq 5$, dann gilt ganz allgemein für $z = (\zeta + \bar{\zeta})$:

$$z^2 = (\zeta + \bar{\zeta})^2 = \zeta^2 + 2\zeta\bar{\zeta} + \bar{\zeta}^2 = \zeta^2 + \bar{\zeta}^2 + 2.$$

Addiert man z und z^2 , so erhält man mit Hilfe der geometrischen Summenformel

$$z + z^2 = (\zeta + \bar{\zeta} + \zeta^2 + \bar{\zeta}^2 + 1) + 1 = 1$$

und damit $z_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Mit diesem Wissen lassen sich nun die weiteren Eigenvektoren von $U_{|w}$ berechnen, denn für $\Sigma_\alpha = e_1 + \alpha e_2 + \alpha^2 e_3 + \alpha^3 e_4 + \alpha^4 e_5$ mit $\alpha = \exp(\frac{2\pi i}{5})$ gilt folglich

$$\alpha + \alpha^4 - (\alpha^2 + \alpha^3) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} - \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$$

und somit

$$\begin{aligned} U_{|w}(\Sigma_\alpha) &= U_{|w}(e_1) + \alpha U_{|w}(e_2) + \alpha^2 U_{|w}(e_3) + \alpha^3 U_{|w}(e_4) + \alpha^4 U_{|w}(e_5) \\ &= (e_6 + e_2 - e_4 - e_3 + e_5) + \alpha(e_6 + e_3 - e_5 - e_4 + e_1) \\ &\quad + \alpha^2(e_6 + e_4 - e_1 - e_5 + e_2) + \alpha^3(e_6 + e_5 - e_2 - e_1 + e_3) \\ &\quad + \alpha^4(e_6 + e_1 - e_3 - e_2 + e_4) \\ &= (\alpha - \alpha^2 - \alpha^3 + \alpha^4)e_1 + (1 + \alpha^2 - \alpha^3 - \alpha^4)e_2 \\ &\quad + (-1 + \alpha + \alpha^3 - \alpha^4)e_3 + (-1 - \alpha + \alpha^2 + \alpha^4)e_4 \\ &\quad + (1 - \alpha - \alpha^2 + \alpha^3)e_5 + (1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4)e_6 \\ &= (\alpha + \alpha^4 - \alpha^2 - \alpha^3)e_1 + (\alpha + \alpha^4 - \alpha^2 - \alpha^3)\alpha e_2 \\ &\quad + (\alpha + \alpha^4 - \alpha^2 - \alpha^3)\alpha^2 e_3 + (\alpha + \alpha^4 - \alpha^2 - \alpha^3)\alpha^3 e_4 \\ &\quad + (\alpha + \alpha^4 - \alpha^2 - \alpha^3)\alpha^4 e_5 \\ &= \sqrt{5}e_1 + \sqrt{5}\alpha e_2 + \sqrt{5}\alpha^2 e_3 + \sqrt{5}\alpha^3 e_4 + \sqrt{5}\alpha^4 e_5 \\ &= \sqrt{5}\Sigma_\alpha, \end{aligned}$$

was bedeutet, dass Σ_α ein komplexer Eigenvektor von $U_{|w}$ zum Eigenwert $\sqrt{5}$ ist. Wegen $U_{|w} \in \mathbb{Z}^{6 \times 6} \subset \mathbb{R}^{6 \times 6}$ ist jedoch auch der zu Σ_α komplex konjugierte Vektor $\Sigma_{\bar{\alpha}} = \Sigma_{\alpha^4}$ ein Eigenvektor von $U_{|w}$ zum Eigenwert $\sqrt{5}$.

Analog zu obiger Rechnung gilt ebenso

$$U_{|W}(\Sigma_{\alpha^2}) = -\sqrt{5}\Sigma_{\alpha^2}.$$

Demnach ist Σ_{α^2} ein komplexer Eigenvektor von $U_{|W}$ zum Eigenwert $-\sqrt{5}$, und somit ist auch wieder der dazu komplex konjugierte Vektor $\Sigma_{\bar{\alpha}^2} = \Sigma_{\alpha^3}$ ein komplexer Eigenvektor von $U_{|W}$ zum Eigenwert $-\sqrt{5}$. Insgesamt folgt daher:

$$(A.1) \quad \mathbb{R}^6 \cong E_{\sqrt{5}} \oplus E_{-\sqrt{5}} \quad \text{mit } E_{\sqrt{5}} \perp E_{-\sqrt{5}},$$

wobei $E_{\sqrt{5}} = \text{Spann}\{e_6 + \Sigma_6, \Sigma_\alpha, \Sigma_{\bar{\alpha}}\} \cong \mathbb{R}^3$ und $E_{-\sqrt{5}} = \text{Spann}\{e_6 - \Sigma_6, \Sigma_{\alpha^2}, \Sigma_{\bar{\alpha}^2}\} \cong \mathbb{R}^3$.

Die Ermittlung der Eigenwerte und Eigenvektoren von $S = 2I - U_{|W}$

Wegen $S = 2I - U_{|W}$ folgt aus obigen Berechnungen:

- $2 - \sqrt{5}$ ist Eigenwert von S zu den drei (komplexen) Eigenvektoren $e_6 + \Sigma_6$ und Σ_α sowie $\Sigma_{\bar{\alpha}}$.
- $2 + \sqrt{5}$ ist Eigenwert von S zu den drei (komplexen) Eigenvektoren $e_6 - \Sigma_6$ sowie Σ_{α^2} und $\Sigma_{\bar{\alpha}^2}$.

Damit gilt für $E_{(2-\sqrt{5})} = \text{Spann}\{e_6 + \Sigma_6, \Sigma_\alpha, \Sigma_{\bar{\alpha}}\}$ und $E_{(2+\sqrt{5})} = \text{Spann}\{e_6 - \Sigma_6, \Sigma_{\alpha^2}, \Sigma_{\bar{\alpha}^2}\}$:

$$(A.2) \quad \mathbb{R}^6 \cong E_{(2-\sqrt{5})} \oplus E_{(2+\sqrt{5})} \quad \text{mit } E_{(2-\sqrt{5})} \perp E_{(2+\sqrt{5})}.$$

A.2. Die Geometrie des Ikosaeders

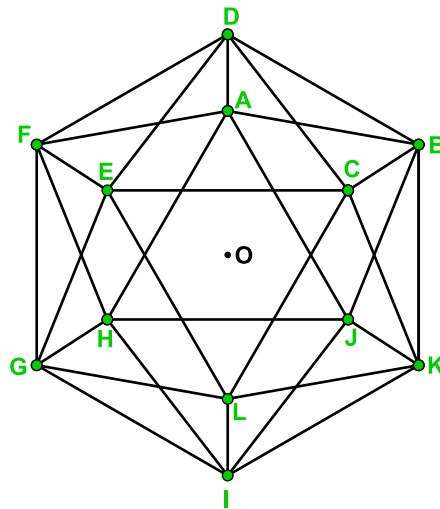


Abbildung A.1.: Ikosaeder mit den Ecken A bis L

Grunddaten zum Ikosaeder

Der Ikosaeder zählt zu den fünf platonischen Körpern. Er besitzt 20 gleichseitige Dreiecke als Seitenflächen, 30 Kanten sowie 12 Eckpunkte. Die dazugehörige Drehgruppe G hat 60 Elemente, wobei die folgenden Drehachsen existieren:

- Durch gegenüberliegende Ecken gibt es insgesamt sechs fünfzählige Drehachsen.
- Durch die Mittelpunkte gegenüberliegender Flächen gibt es insgesamt zehn dreizählige Drehachsen.
- Durch die Mittelpunkte gegenüberliegender Kanten gibt es insgesamt fünfzehn zweizählige Drehachsen.

Die Lagebeziehung zweier beliebiger Ikosaederecken

Wählen wir die Ikosaederecke D in obiger Abbildung und fragen, welche Nachbarpunkte für die gewählte Ecke existieren:

- Es gibt fünf *direkte Nachbarecken*: die Ikosaederecken A und B sowie C und E sowie F .
- Es gibt fünf *übernächste Nachbarn*: die Ikosaederecken K und J sowie H und G sowie L .
- Es gibt die gegenüberliegende Ecke I , genannt *Antipodenecke*.

Das bedeutet, dass zwei beliebige Ikosaederecken genau drei verschiedene Lagebeziehungen einnehmen können: Sie können direkt benachbart sein, es können übernächste Nachbarn im Ikosaeder sein oder die beiden gewählten Ecken sind Antipodenecken.

Der Abstand zweier beliebiger Ikosaederecken

Sei s die Kantenlänge des Ikosaeders, dann gilt:

- Zwei benachbarte Ikosaederecken unterscheiden sich gerade um eine Kante, folglich ist der Abstand zwischen zwei benachbarten Ikosaederecken gleich s .
- Der Abstand zweier übernächster Ikosaederecken soll am Beispiel der Ecken B und F , siehe Abbildung A.1, berechnet werden. Gesucht ist demnach $|\overline{FB}|$. Die gewählten Punkte bilden zusammen mit den Ikosaederecken A und C sowie E ein regelmäßiges Fünfeck mit Kantenlänge s . Die Strecke \overline{FB} entspricht nun gerade einer der Diagonalen in diesem Fünfeck. Weil für das Verhältnis von Diagonale und Kante im regelmäßigen Fünfeck allgemein gilt

$$\frac{\text{Diagonale}}{\text{Kante}} = \Phi,$$

wobei $\Phi = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ den *Goldenen Schnitt* bezeichnet, folgt $|\overline{FB}| = \Phi s$. Der Abstand zweier übernächster Nachbarn im Ikosaeder ist damit gleich Φs .

- Bleibt noch der Abstand zweier antipodaler Ecken zu klären. Dies soll anhand der beiden Ikosaederecken F und K geschehen, gesucht ist also $|\overline{FK}|$. In Abbildung A.1 sehen wir, dass die vier Ikosaederecken B und F sowie G und K ein gemeinsames Rechteck bilden. Demnach folgt mit dem Satz von Pythagoras und dem bisherigen Wissen:

$$|\overline{FK}|^2 = |\overline{FB}|^2 + |\overline{BK}|^2 \text{ und damit } |\overline{FK}| = \sqrt{\Phi^2 s^2 + s^2} = \sqrt{\Phi^2 + 1} s.$$

Der Abstand eines Antipodenpaares im Ikosaeder ist folglich $\sqrt{\Phi^2 + 1} s$.

Der Winkel zwischen zwei beliebigen Ikosaederecken

Hierzu betrachten wir noch einmal das bereits erwähnte Rechteck $BFGK$, siehe Abbildung A.2: Die Ikosaederecken B und K sind Nachbarecken und somit entspricht der

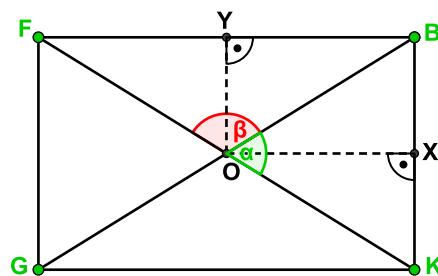


Abbildung A.2.: Das Rechteck mit den Ikosaederecken B und F sowie G und K

Winkel α , grün eingezeichnet, gerade dem Winkel zwischen zwei benachbarten Ikosaederecken. Die Punkte F und B dagegen sind gerade übernächste Nachbarn im Ikosaeder, was bedeutet, dass der Winkel β , rot markiert, dem Winkel zwischen zwei übernächsten

A. Anhang

Nachbarn im Ikosaeder entspricht. Die Ikosaederecken F und K sind antipodalen Ecken und nach Definition beträgt der Winkel zwischen Antipodenpaaren gerade 180° , was wir auch in Abbildung A.2 sofort sehen.

Daneben ergibt sich aus obiger Abbildung aber unmittelbar noch eine weitere wichtige Folgerung:

Beobachtung A.1. *Der Winkel α zwischen zwei benachbarten Ikosaederecken und der Winkel β zwischen zwei übernächsten Nachbarn im Ikosaeder ergänzen sich zu 180° .*

Die Winkel α und β können wie folgt berechnet werden: Mit dem Wissen, dass die Punkte X und Y die Mittelpunkte der Seiten \overline{KB} und \overline{FB} in Abbildung A.2 bezeichnen, und den bisherigen Ergebnissen folgt:

$$|\overline{OX}| = |\overline{YB}| = \frac{1}{2} |\overline{FB}| = \frac{1}{2} \Phi s \quad \text{und} \quad |\overline{OY}| = |\overline{XB}| = \frac{1}{2} |\overline{KB}| = \frac{1}{2} s$$

sowie

$$|\overline{OB}| = |\overline{OK}| = \frac{1}{2} |\overline{FK}| = \frac{1}{2} \sqrt{\Phi^2 + 1} s.$$

Folglich gilt für die halben Winkel $\frac{\alpha}{2}$ und $\frac{\beta}{2}$:

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{|\overline{OX}|}{|\overline{OK}|} = \frac{\Phi}{\sqrt{\Phi^2 + 1}} \quad \text{und} \quad \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{|\overline{XK}|}{|\overline{OK}|} = \frac{1}{\sqrt{\Phi^2 + 1}}$$

sowie

$$\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{|\overline{OY}|}{|\overline{OB}|} = \frac{1}{\sqrt{\Phi^2 + 1}} \quad \text{und} \quad \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{|\overline{YB}|}{|\overline{OB}|} = \frac{\Phi}{\sqrt{\Phi^2 + 1}}.$$

Mit Hilfe der Doppelwinkelformel $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ und unter Berücksichtigung der definierenden Gleichheit $\Phi^2 = \Phi + 1$ des Goldenen Schnitts erhalten wir schließlich:

$$(A.3) \quad \cos \alpha = \frac{\Phi^2}{\Phi^2 + 1} - \frac{1}{\Phi^2 + 1} = \frac{\Phi}{\Phi^2 + 1} = \frac{1}{2\Phi - 1} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

sowie

$$(A.4) \quad \cos \beta = \frac{1}{\Phi^2 + 1} - \frac{\Phi^2}{\Phi^2 + 1} = \frac{-\Phi}{\Phi^2 + 1} = \frac{-1}{2\Phi - 1} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

und damit können wir letzten Endes auch die beiden gesuchten Winkel α und β ganz konkret berechnen:

$$(A.5) \quad \alpha \approx 63,43^\circ \quad \text{sowie} \quad \beta \approx 116,57^\circ.$$

Der Winkel zwischen zwei aneinanderliegenden Seitenflächen

Eine weitere Größe, die noch berechnet werden kann, ist der Schnittwinkel zwischen zwei aneinanderliegenden Seitenflächen im Ikosaeder. Wir wählen dazu die beiden Dreiecke BCD und BCK in Abbildung A.1. Gesucht ist demnach der Winkel $\gamma = \angle DZK$, wobei Z den Mittelpunkt der Kante \overline{CB} bezeichnet:

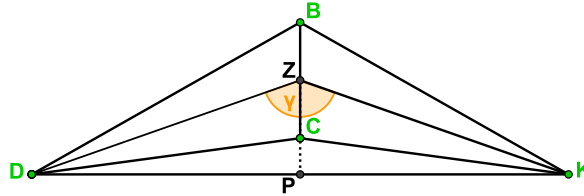


Abbildung A.3.: Die beiden Dreiecke DCB und KCB aus Abbildung A.1

Bemerkungen zu Abbildung A.3:

- Der Punkt P ist Mittelpunkt der Strecke \overline{DK} . Da die beiden Ikosaederecken D und K gerade übernächste Nachbarn im Ikosaeder sind, gilt $|\overline{DP}| = |\overline{PK}| = \frac{1}{2}\Phi s$.
- Die gewählten Dreiecke BCD und BCK sind symmetrisch bezüglich der Ebene durch die gemeinsame Kante \overline{CB} und den Punkt P . Folglich gilt für den gesuchten Winkel die Gleichheit $\gamma = \angle DZK = 2\angle PZK$.
- Die Seitenflächen des Ikosaeders sind gleichseitige Dreiecke. Die Strecke \overline{ZK} entspricht der Höhe im gleichseitigen Dreieck BCK und folglich gilt $|\overline{ZK}| = \frac{\sqrt{3}}{2}s$.

Damit erhalten wir:

$$\sin(\angle PZK) = \frac{|\overline{PK}|}{|\overline{ZK}|} = \frac{\Phi s}{\sqrt{3}s} = \frac{1}{\sqrt{3}}\Phi$$

und für den gesuchten Winkel γ gilt folglich:

$$(A.6) \quad \gamma = 2\angle PZK = 2 \cdot \arcsin\left(\frac{\Phi}{\sqrt{3}}\right) \approx 2 \cdot 69.09^\circ \approx 138.18^\circ.$$

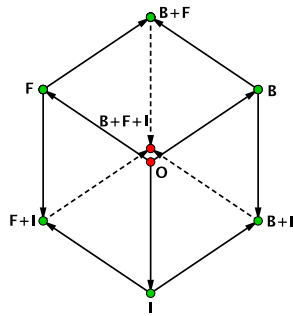
Folgerungen für die Geometrie der Pflastersteine

Die Pflastersteine im Projektionsraum $E \cong \mathbb{R}^3$ werden im Fall des dreidimensionalen Penrose-Musters aufgespannt von den Einheitsvektoren $\pm v_i$ mit $1 \leq i \leq 6$, welche gemäß den Überlegungen in Abschnitt 1.3.3 wieder Ikosaederecken sind, angeordnet wie in Abbildung 1.5 gezeigt. Wir können damit einige wichtige Größen der Pflastersteine – wie beispielsweise die Länge der unterschiedlichen Diagonalen – mit Hilfe lokaler Ikosaederkoordinaten berechnen. Tabelle A.1 nennt für die Punkte A bis L aus Abbildung A.1 die von uns verwendeten Koordinaten:

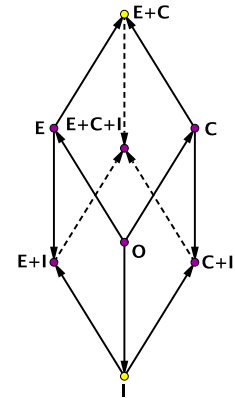
Ecke	Koordinaten
A	$(-1, -\Phi, 0)$
B	$(+1, -\Phi, 0)$
C	$(+\Phi, 0, +1)$
D	$(0, -1, +\Phi)$
E	$(0, +1, +\Phi)$
F	$(-\Phi, 0, +1)$
G	$(-1, +\Phi, 0)$
H	$(-\Phi, 0, -1)$
I	$(0, +1, -\Phi)$
J	$(0, -1, -\Phi)$
K	$(+\Phi, 0, -1)$
L	$(+1, +\Phi, 0)$

Tabelle A.1.: Die lokalen Ikosaederkoordinaten in Bezug auf Abbildung A.1

O.B.d.A. nehmen wir im Folgenden an, dass der flache Pflasterstein ausgehend von einer stumpfen Ecke von den drei Ikosaederecken B und F sowie I aufgespannt wird, der lange Pflasterstein, ebenfalls ausgehend von einer stumpfen Ecke, dagegen von den drei Ikosaederecken C und E sowie I , siehe Abbildung A.4.



(a) Koordinaten des flachen Steins



(b) Koordinaten des langen Steins

Abbildung A.4.: Lokale Koordinaten der beiden Pflastersteine

Damit lassen sich sowohl die Kantenlänge als auch die Längen der einzelnen Diagonalen im langen und flachen Pflasterstein in lokalen Koordinaten berechnen. Für die Kantenlänge der Pflastersteine erhalten wir:

$$|\overline{OB}| = |(+1, -\Phi, 0)| = \sqrt{1 + \Phi^2} = \sqrt{1 + \Phi + 1} = \sqrt{\Phi + 2}.$$

Für die lange Diagonale des flachen Steins gilt:

$$\begin{aligned}
|\overline{B(F+I)}| &= |\overline{F(B+I)}| = |\overline{(B+F)I}| \\
&= |(-1-\Phi, +1+\Phi, +1-\Phi)| \\
&= \sqrt{1+2\Phi+\Phi^2+1+2\Phi+\Phi^2+1-2\Phi+\Phi^2} \\
&= \sqrt{3\Phi^2+2\Phi+3} = \sqrt{3(\Phi+1)+2\Phi+3} = \sqrt{5\Phi+6}
\end{aligned}$$

und für die kurze Diagonale des flachen Steins:

$$|\overline{O(B+F+I)}| = |(+1-\Phi, +1-\Phi, +1-\Phi)| = -(1-\Phi)\sqrt{3} = (\Phi-1)\sqrt{3}.$$

Schließlich erhalten wir für die lange Diagonale des langen Steins:

$$\begin{aligned}
|\overline{I(E+C)}| &= |(+\Phi, 0, +1+2\Phi)| \\
&= \sqrt{\Phi^2+1+4\Phi+4\Phi^2} \\
&= \sqrt{5\Phi^2+4\Phi+1} = \sqrt{5(\Phi+1)+4\Phi+1} \\
&= \sqrt{9\Phi+6} = \sqrt{3(3\Phi+2)} = \sqrt{3(\Phi+1)^2} = (\Phi+1)\sqrt{3}
\end{aligned}$$

und für die kurze Diagonale des langen Steins:

$$\begin{aligned}
|\overline{E(C+I)}| &= |\overline{C(E+I)}| = |\overline{O(E+C+I)}| \\
&= |(+\Phi, 0, 1-2\Phi)| \\
&= \sqrt{\Phi^2+1-4\Phi+4\Phi^2} \\
&= \sqrt{5\Phi^2-4\Phi+1} = \sqrt{5(\Phi+1)-4\Phi+1} = \sqrt{\Phi+6}.
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich abschließend:

Beobachtung A.2. Sowohl die Kantenlänge als auch die Länge der vier unterschiedlichen Diagonalen im langen und flachen Pflasterstein sind jeweils eindeutig in dem Sinn, dass keine dieser fünf Größen in einem ganzzahligen Verhältnis zueinander stehen.

A.3. Hilfskonstruktionen bezüglich des Fensters V

Wie bereits erwähnt, sollen einige Hilfskonstruktionen eingeführt werden, die es uns ermöglichen, analog zu den Beispielbetrachtungen im \mathbb{R}^2 auch die Gebiete im Fall des dreidimensionalen Penrose-Musters graphisch, also zweidimensional, zu konstruieren.

In vielen Fällen wird an Stelle des Fensters V selbst die Projektion von V auf eine bestimmte Ebene zu Hilfe genommen. Dieses Projektionsbild soll im Folgenden konstruiert werden.

Die Projektion des Fensters V auf eine Zeichenebene

Um mit dem Projektionsbild des Fensters V auf eine Ebene auch sinnvoll arbeiten zu können, wollen wir erreichen, dass wenigstens ein Teil der Längen und Winkel von V bei der Projektion erhalten bleiben. Aus diesem Grund darf nicht irgendeine beliebige Ebene als Projektionsebene⁵⁷ gewählt werden, und so wählen wir die Ebene parallel zu einer der 30 Fensterrauten $R_{(\pm m, \pm n)}$ mit $m, n \in \{1, \dots, 6\}$ und $m < n$, vgl. 1.19.⁵⁸

Beobachtung A.3. *Es ist egal, welche der Fensterrauten $R_{(\pm m, \pm n)}$ mit $m, n \in \{1, \dots, 6\}$ und $m < n$ man zur Bestimmung der Projektionsebene wählt: Die Gestalt des Projektionsbilds an sich bleibt stets die Gleiche.*

Beweis. Das Fenster V hat die Gestalt eines Rhombentriakontaeders. Die 30 Fensterrauten $R_{(\pm m, \pm n)}$ mit $m, n \in \{1, \dots, 6\}$ und $m < n$ bilden gerade die Seitenflächen dieses gleichseitigen Polyeders, und folglich ist es für die Gestalt des Projektionsbilds egal, welche dieser Fensterrauten man zur Bestimmung der Projektionsebene auswählt. \square

Mit dem Wissen, dass die 12 Fensterecken des Typs \mathcal{S}_{max}^1 einen Ikosaeder aufspannen, vgl. 1.3.4, und dass wiederum je zwei parallele Kanten im Ikosaeder ein sogenanntes *Goldenes Rechteck*, also ein Rechteck, dessen Kanten im Verhältnis des Goldenen Schnitts zueinander stehen, bilden, lässt sich das gesuchte Projektionsbild des Fensters V konstruieren.

⁵⁷Die Begriffe *Projektionsebene* und *Zeichenebene* werden dabei im Folgenden äquivalent gebraucht.

⁵⁸Bei der Projektion werden genau die Größen isometrisch abgebildet, die *in der Zeichenebene liegen*. Genau genommen meint diese Terminologie *in einer Ebene parallel zur Zeichenebene liegen*, da die Projektionsabbildung jedoch gerade die Höhenkomponente vernachlässigt, sind die beiden Sprechweisen identisch!

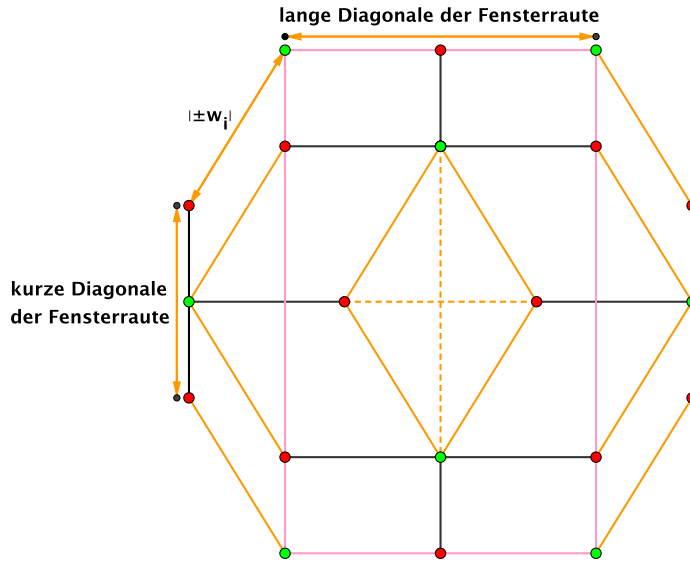


Abbildung A.5.: Die Projektion des Fensters V auf eine Ebene parallel zu einer der Fenster-rauten R

Bemerkungen zu Abbildung A.5:

- Rosa eingezeichnet ist das Goldene Rechteck, von dem wir ausgehen, und das problemlos konstruiert werden kann.
- Gelb gekennzeichnet sind alle Größen, die in der Zeichenebene liegen und somit unter der Projektion erhalten bleiben, d. h. isometrisch abgebildet werden.
- Die grün markierten Punkte sind Ikosaederecken des Fensters V , also Ecken des Typs \mathcal{S}_{max}^1 .
- Die rot markierten Punkte sind Dodekaederecken des Fensters V , also Ecken des Typs \mathcal{S}_{max}^2 .

Legen wir uns ganz konkret auf eine der Fenster-rauten $R_{(\pm m, \pm n)}$ mit $m, n \in \{1, \dots, 6\}$ und $m < n$ fest und wählen die Projektionsebene parallel zu dieser Raute, so kann das eben erstellte Projektionsbild des Fensters V noch um die konkreten Angaben der entsprechenden Rauten und Ecken ergänzt werden.

Bemerkung. Es gibt demnach gewissermaßen einen *Typ* von Zeichenebene – die Ebene parallel zu einer der 30 Fenster-rauten – und daher können wir ganz allgemein auch von *der* Zeichenebene sprechen. Durch Festlegung auf eine bestimmte Raute kann die Zeichenebene jedoch für jede der Fenster-rauten $R_{(\pm m, \pm n)}$ mit $m, n \in \{1, \dots, 6\}$ und $m < n$ realisiert werden, vgl. dazu die Bemerkung auf Seite 40.

Exemplarisch soll diese Festlegung hier für die Projektionsebene parallel zu der Raute mit den vier Eckpunkten Φw_5 und $-\Phi w_6$ sowie $\Phi w_5 + w_4$ und $\Phi w_5 + w_1$ gezeigt werden.⁵⁹ Gemäß den Bemerkungen auf Seite 29 bezeichnen wir diese mit $R_{(5,-6)}$. Wir erhalten:

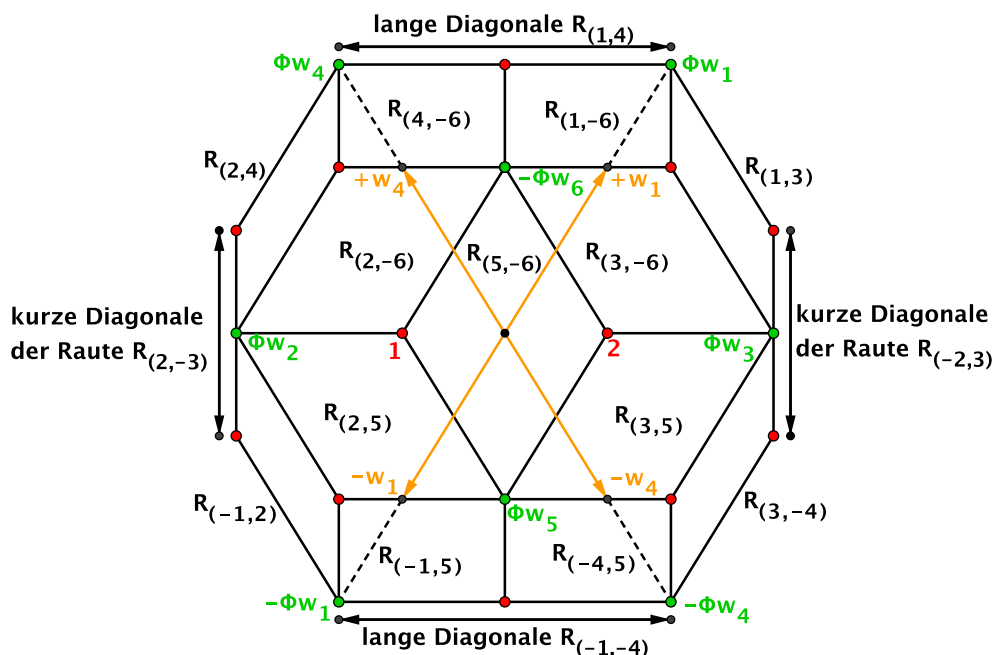


Abbildung A.6.: Die Projektion des Fensters V auf die Ebene parallel zu Raute $R_{(5,-6)}$

Bemerkungen zu Abbildung A.6:

- Grün eingezeichnet sind wieder die Ikosaederecken des Fensters V und rot markiert, aber der Übersicht halber ohne Nennung der entsprechenden Koordinaten, die Dodekaederecken von V . Die Koordinaten der mit 1 und 2 gekennzeichneten Dodekaederecken sind in Fußnote 59 genannt.
- Die beiden Paare $\pm w_1$ und $\pm w_4$ von Einheitsvektoren, gelb eingezeichnet, liegen jeweils in der Zeichenebene selbst und werden folglich isometrisch abgebildet.
- Es fällt auf, dass nicht alle 30 Fensterrauten und nicht alle 32 Eckpunkte von V in der Zeichnung zu finden sind. Grund ist folgender: Bei der Projektion fallen diejenigen Größen, die sich nur um eine Spiegelung an der Projektionsebene voneinander unterscheiden, zusammen. In Abbildung A.6 sind daher nur diejenigen Rauten und Ecken explizit genannt, die bezüglich der Raute $R_{(5,-6)}$ in der oberen Hälfte des Fensters V liegen. Tabelle A.2 gibt eine Übersicht über die Paare von Rauten, welche in obigem Projektionsbild zusammenfallen.

⁵⁹ $\Phi w_5 + w_4 = -\Phi w_6 - w_1 = \Phi w_2 + w_3$ sowie $\Phi w_5 + w_1 = -\Phi w_6 - w_4 = \Phi w_3 + w_2$, vgl. Tabelle 1.1.

Raute in Abbildung A.6	Spiegelsymmetrische Raute
$R_{(+5,-6)}$	$R_{(-5,+6)}$
$R_{(+4,-6)}$	$R_{(+4,-5)}$
$R_{(+1,-6)}$	$R_{(+1,-5)}$
$R_{(+2,-6)}$	$R_{(-3,-5)}$
$R_{(+3,-6)}$	$R_{(-2,-5)}$
$R_{(+2,+4)}$	$R_{(-3,+4)}$
$R_{(+1,+3)}$	$R_{(+1,-2)}$
$R_{(+2,+5)}$	$R_{(-3,+6)}$
$R_{(+3,+5)}$	$R_{(-2,+6)}$
$R_{(-1,+5)}$	$R_{(-1,+6)}$
$R_{(-4,+5)}$	$R_{(-4,+6)}$
$R_{(-1,+2)}$	$R_{(-1,-3)}$
$R_{(+3,-4)}$	$R_{(-2,-4)}$

Tabelle A.2.: Diese Rauten fallen unter der Projektion auf die Zeichenebene parallel zu Raute $R_{(5,-6)}$ zusammen.

Lateral- und Höhenkomponente der Einheitsvektoren $\pm w_1, \dots, \pm w_6$

Neben dem Fenster V müssen auch die Einheitsvektoren $\pm w_1, \dots, \pm w_6$ im Hilfsraum $F \cong \mathbb{R}^3$ auf irgendeine Art zweidimensional gefasst werden. Dies geschieht mit Hilfe der folgenden Zerlegung:

Komponentenzerlegung A.4. *Bezüglich der in A.3 bestimmten Zeichenebene kann man jeden der Einheitsvektoren $\pm w_i$ für alle $1 \leq i \leq 6$ in zwei Komponenten zerlegen: in eine Komponente in Richtung dieser Zeichenebene, genannt Lateralkomponente LK, und in die dazu senkrechte Komponente, genannt Höhenkomponente HK.*

Bemerkung. Die konkrete Komponentenzerlegung der Einheitsvektoren $\pm w_1, \dots, \pm w_6$ ist abhängig von der Wahl der jeweiligen Zeichenebene! Nach Beobachtung A.3 ist es zwar für die Gestalt des Projektionsbilds an sich unerheblich, welche der 30 Fensterrauten man zur Bestimmung der Projektionsebene auswählt, eine konkrete Angabe der verschiedenen Rauten und Ecken im Projektionsbild kann jedoch nur in Abhängigkeit von der Wahl einer festen Raute geschehen, vgl. Abbildung A.6.

Im Folgenden sollen die einzelnen Komponenten der Einheitsvektoren $\pm w_1, \dots, \pm w_6$ bezüglich der Projektionsebene parallel zu Raute $R_{(5,-6)}$ bestimmt werden. Im vorherigen Abschnitt haben wir bereits das Projektionsbild für diesen konkreten Fall erstellt und genau dieses liefert nun sofort ein erstes Ergebnis:

Beobachtung A.5. *Bezüglich der Zeichenebene parallel zu Raute $R_{(5,-6)}$ gilt: Die beiden Paare $\pm w_1$ und $\pm w_4$ von Einheitsvektoren liegen ganz in der Zeichenebene selbst und besitzen folglich keine Höhenkomponente.*

Beweis. Dies ist unmittelbar aus Abbildung A.6 zu entnehmen. \square

Wie aber können wir die Komponenten der noch verbleibenden Einheitsrichtungen bestimmen? Hier hilft die folgende Idee weiter: Auf Grund der besonderen Gestalt des Fensters V als der eines Rhombentriakontaeders und dessen Invarianz unter der Drehgruppe G des Ikosaeders, vgl. insbesondere Beobachtung 1.20, können wir Raute $R_{(5,-6)}$ an einer anderen Stelle in Abbildung A.6 aufsuchen und die entsprechenden Ergebnisse anschließend mit Hilfe von Analogien auf $R_{(5,-6)}$ übertragen. Dieses Vorgehen wird im Folgenden sehr wichtig sein und oft zum Einsatz kommen! Es gilt:

Prinzip der Analogiebetrachtung A.6. *Das Fenster V hat die Gestalt eines gleichseitigen Polyeders, und so kann man mit Hilfe von Analogiebetrachtungen Ergebnisse bezüglich einer der 30 Fensterrauten $R_{(\pm m, \pm n)}$ mit $m, n \in \{1, \dots, 6\}$ und $m < n$ sofort auf alle übrigen 29 Fensterrauten übertragen.*

Damit lassen sich die Lateral- und Höhenkomponente der Einheitsrichtungen $\pm w_2$ und $\pm w_3$ sowie $\pm w_5$ und $\pm w_6$ bestimmen. Wie ist dieses Prinzip zu verstehen? Entspricht $R_{(5,-6)}$ der Raute $R_{(1,4)}$, senkrecht zur Zeichenebene, dann spielt $+w_5$ die Rolle des Einheitsvektors $+w_4$ und $-w_6$ die des Einheitsvektors $+w_1$. Analog dazu spielt ebenso $-w_5$ die Rolle des Einheitsvektors $-w_4$ sowie $+w_6$ die des Einheitsvektors $-w_1$.

Weil $\pm w_1$ und $\pm w_4$ nun aber bezüglich der Zeichenebene parallel zu Raute $R_{(5,-6)}$ isometrisch abgebildet werden, können wir aus Abbildung A.6 die Lateral- und Höhenkomponente der Einheitsrichtungen $\pm w_5$ und $\pm w_6$ ablesen.

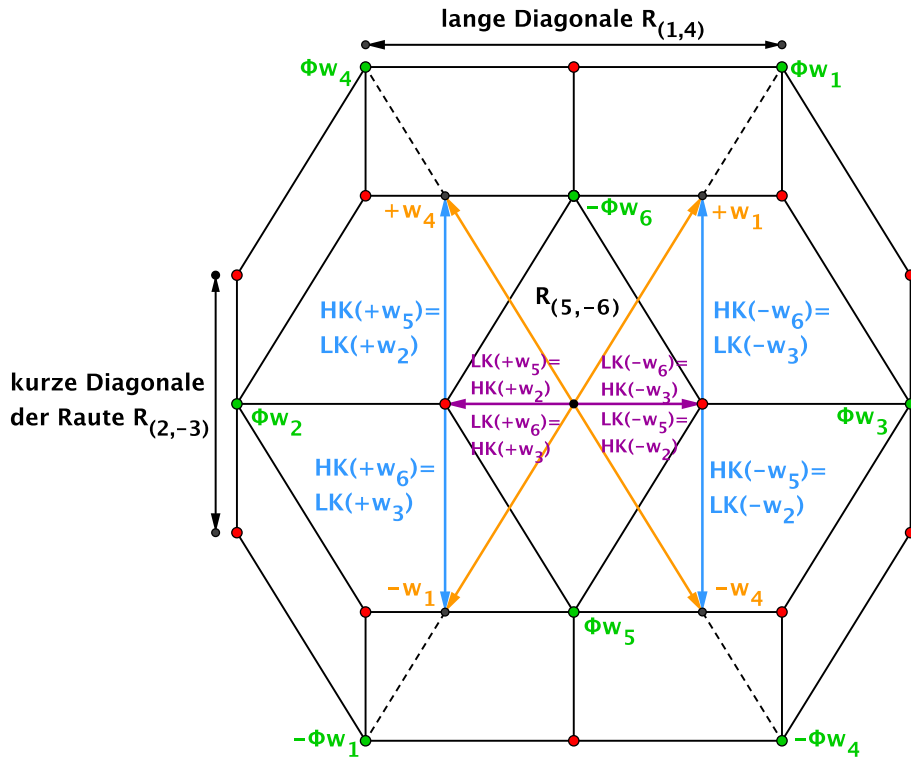


Abbildung A.7.: Lateral- und Höhenkomponente von $\pm w_2$ und $\pm w_3$ sowie $\pm w_5$ und $\pm w_6$

Mit demselben Vorgehen lassen sich ebenso die Komponenten der Einheitsrichtungen $\pm w_2$ und $\pm w_3$ ermitteln: Entspricht $R_{(5,-6)}$ der Raute $R_{(2,-3)}$, ebenfalls senkrecht zur Zeichenebene, dann spielt $+w_2$ die Rolle des Einheitsvektors $+w_4$ und $+w_3$ die des Einheitsvektors $-w_1$. Analog dazu spielt auch wieder $-w_2$ die Rolle des Einheitsvektors $-w_4$ und $-w_3$ die des Einheitsvektors $+w_1$. Wir erhalten damit auch die Lateral- und Höhenkomponente von $\pm w_2$ und $\pm w_3$, siehe Abbildung A.7. Insgesamt folgt:

Beobachtung A.7. *Bezüglich der Zeichenebene parallel zu Raute $R_{(5,-6)}$ existieren für die Einheitsvektoren $\pm w_2$ und $\pm w_3$ sowie $\pm w_5$ und $\pm w_6$ insgesamt nur zwei verschiedene Komponentenlängen, i. e.*

$$|LK(\pm w_5, \pm w_6)| = |HK(\pm w_2, \pm w_3)| \quad \text{sowie} \quad |HK(\pm w_5, \pm w_6)| = |LK(\pm w_2, \pm w_3)|.$$

Mit Hilfe des oben formulierten Prinzips der Analogiebetrachtung A.6 lassen sich diese Ergebnisse auf alle übrigen 29 Fensterrauten übertragen. Die Beobachtungen A.5 und A.7 können damit auch in einer allgemeineren Form, d. h. unabhängig von der Wahl einer konkreten Zeichenebene, formuliert werden:

Beobachtung A.8. *Für die Zeichenebene parallel zu einer der 30 Fensterrauten gilt:*

- *Je zwei Paare von Einheitsvektoren $\pm w_i$ und $\pm w_k$ mit $1 \leq i \neq k \leq 6$ liegen stets ganz in der Zeichenebene und besitzen folglich keine Höhenkomponente.*
- *Für die verbleibenden vier Paare von Einheitsvektoren existieren nur insgesamt zwei verschiedene Komponentenlängen: Die Lateralkomponente von zweien dieser vier Paare ist dabei gleich der Höhenkomponente der anderen beiden verbleibenden Paare und umgekehrt.*

Bemerkung. Umgangssprachlich ausgedrückt gibt es damit genau zwei verschiedene Längen, mit denen wir bezüglich der Zerlegung der Einheitsvektoren in ihre jeweilige Lateral- und Höhenkomponente arbeiten müssen: die blaue „lange“ und die lila „kurze“ Länge in Abbildung A.7. In den verschiedenen Konstruktionsbildern werden wir diese Farben in konsistenter Weise verwenden!

Ebenentypen und Fensterschnitte

Um die dreidimensionalen Gebiete im Fenster V zweidimensional fassen und somit graphisch konstruieren zu können, wird das Fenster V mit bestimmten Ebenen geschnitten und anschließend die Gebiete auf diesen zweidimensionalen Schnittebenen elementargeometrisch ermittelt, siehe die Überlegungen in Abschnitt 2.2.2. Auf Grund der besonderen Gestalt von V als der eines gleichseitigen Polyeders können all diese Schnittebenen jedoch auch in bestimmte Typen von Ebenen klassifiziert werden, vgl. die Bemerkung auf Seite 40.

In Beobachtung 2.12 haben wir gesehen: Zur Ermittlung aller Gebiete im Fenster V müssen wir die Teilgebiete auf den Ebenen des Typs \mathcal{E}_1 und \mathcal{E}_2 bestimmen, genauer

genommen auf den Ebenentypen \mathcal{E}_{1+} und \mathcal{E}_{1-} sowie \mathcal{E}_{2+} und \mathcal{E}_{2-} . Im Folgenden soll exemplarisch der Schnitt der Ebene des Typs \mathcal{E}_1 mit dem Fenster V , d. h. der Fensterschnitt \mathcal{E}_1 konstruiert werden. Zudem werden der Übersicht halber alle in dieser Arbeit erwähnten Ebenentypen in einem Gesamtüberblick zusammengestellt.

Die Konstruktion des Fensterschnitts \mathcal{E}_1

Um den Fensterschnitt des Ebenentyps \mathcal{E}_1 konstruieren zu können, muss wieder eine konkrete Ebene dieses Typs gewählt werden. In Analogie zum bisherigen Vorgehen ermitteln wir daher den Schnitt der Ebene $E_1^{(5,-6)}$ mit dem Fenster V , d. h. $E_1^{(5,-6)} \cap V$. Zur Konstruktion greifen wir dabei insbesondere wieder auf das Prinzip der Analogiebetrachtung A.6 zurück.

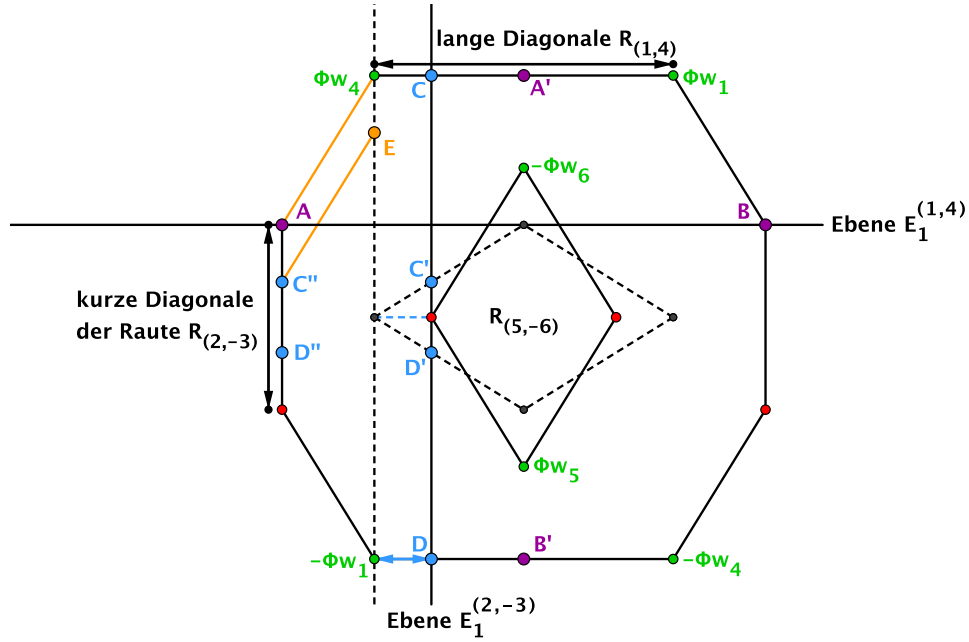


Abbildung A.8.: Die Konstruktion des Schnitts der Ebene $E_1^{(5,-6)}$ mit dem Fenster V

Konstruktion des Fensterschnitts der Ebene $E_1^{(5,-6)}$:

1. Entspricht die Raute $R_{(5,-6)}$ der Raute $R_{(1,4)}$, so spielt die Ebene $E_1^{(5,-6)}$ gerade die Rolle der Ebene $E_1^{(1,4)}$, und die beiden Schnittpunkte dieser Ebene mit dem Rand des Fensters V lassen sich problemlos aus Abbildung A.8 ablesen: Es sind die beiden lila markierten Punkte A und B . Folglich sind A' und B' die Schnittpunkte der Ebene $E_1^{(5,-6)}$ mit dem Rand von V .
2. Entspricht die Raute $R_{(5,-6)}$ der Raute $R_{(2,-3)}$, so spielt nun die Ebene $E_1^{(5,-6)}$ die Rolle der Ebene $E_1^{(2,-3)}$, und auch die beiden Schnittpunkte dieser Ebene mit dem Rand des Fensters V kann man aus obiger Abbildung ablesen: Es sind die beiden blau markierten Punkte C und D .

3. Im Fall der Schnittpunkte C und D gilt es jedoch Folgendes zu beachten: Die Ebene $E_1^{(2,-3)}$ schneidet das Fenster in der langen Diagonalen einer Fensterraute R , blau eingezeichnet. Wollen wir dieses Ergebnis für den Schnitt der Ebene $E_1^{(5,-6)}$ mit V „rückübersetzen“, müssen wir an dieser Stelle fragen: Welchem Abschnitt auf der kurzen Diagonale der Fensterraute R entspricht der ermittelte blaue Abschnitt auf der langen Diagonale der Fensterraute R ? Diese Frage kann mittels der in Abbildung A.8 gestrichelten Raute gelöst werden und wir erhalten die Schnittpunkte C' und D' , und damit schließlich die Schnittpunkte C'' und D'' der Ebene $E_1^{(5,-6)}$ mit dem Rand des Fensters V .
4. Anschließend an den Punkt C'' schneidet die Ebene $E_1^{(5,-6)}$ die Fensterraute $R_{(2,4)}$ parallel zu den beiden Kanten dieser Raute, welche unter Projektion isometrisch abgebildet werden, vgl. Abbildung A.6. Ein Abtragen der Kantenlänge, gelb markiert in Abbildung A.8, ergibt damit den Schnittpunkt E der Ebene $E_1^{(5,-6)}$ mit dem Rand des Fensters V .
5. Durch Verbinden der drei Punkte A' und E sowie C'' und unter Verwendung der Symmetrien des Fensters V , vgl. Beobachtung 1.20, erhalten wir schließlich den Schnitt der Ebene $E_1^{(5,-6)}$ mit dem Fenster V und damit ganz allgemein den Schnitt der Ebene des Typs \mathcal{E}_1 mit V , genannt Fensterschnitt \mathcal{E}_1 .

Für ein besseres Verständnis ist als Bezugsgröße noch der Schnitt durch den Mittelpunkt des Fensters V , welcher gerade dem Rand des in Abbildung A.5 konstruierten Projektionsbilds entspricht, gestrichelt eingezeichnet.

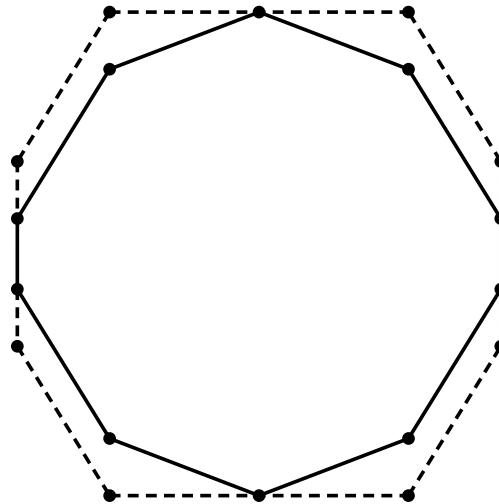


Abbildung A.9.: Der Fensterschnitt \mathcal{E}_1

Übersicht über die einzelnen Ebenentypen

Folgende Abbildung soll abschließend einen Gesamtüberblick über alle in dieser Arbeit erwähnten Ebenentypen geben, beachte hierzu insbesondere Hilfsbeobachtung 1 sowie die Bemerkung auf Seite 59: Jede Raute im Fenster V besitzt eine antipodale Fenster-raute, und damit kennen wir implizit auch bereits sämtliche gestrichelt eingezeichneten Ebenen!

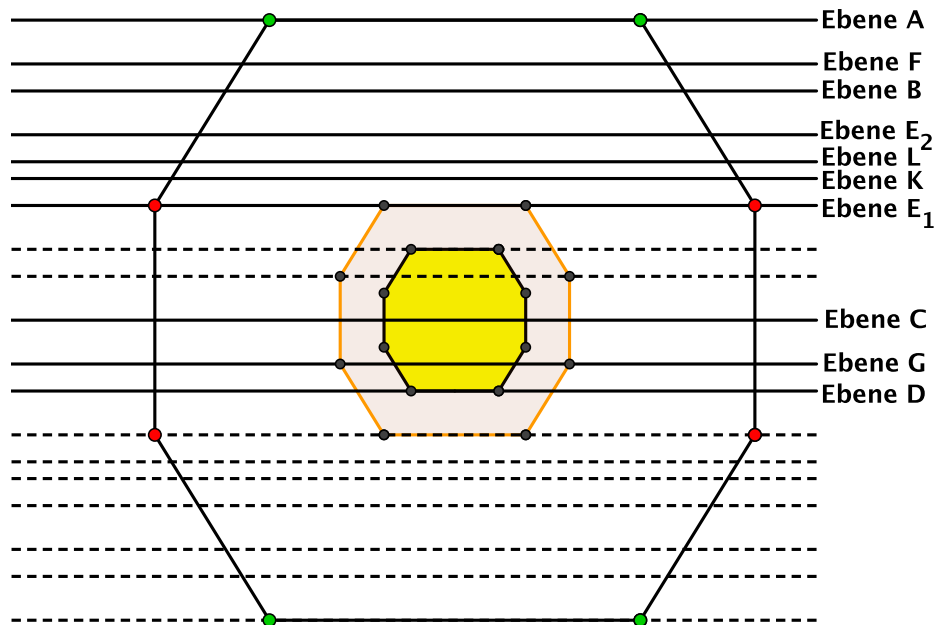


Abbildung A.10.: Übersicht über die unterschiedlichen Ebenentypen

A.4. Die Gebietseinteilungen der unterschiedlichen Ebenentypen

Um das an sich dreidimensionale Fenster V zweidimensional fassbar zu machen, wird, wie in A.3 beschrieben, das Fenster V mit bestimmten Ebenen geschnitten. Will man nun die ebenfalls dreidimensionalen Gebiete $\Omega_4, \dots, \Omega_{12}$ von V bestimmen, vgl. Beobachtung 2.21, kann man dazu, wie in Beobachtung 2.9 formuliert, die zweidimensionalen Einschränkungen $\Omega'_4, \dots, \Omega'_{12}$ der dreidimensionalen Gebiete $\Omega_4, \dots, \Omega_{12}$ auf den unterschiedlichen Schnittebenen konstruieren und mit Hilfe dieser Ergebnisse dann Rückschlüsse auf die Gebiete $\Omega_4, \dots, \Omega_{12}$ im Fenster V ziehen. In Kapitel 2 wird ausführlich die Konstruktion der Gebiete $\Omega'_4, \dots, \Omega'_{12}$ für die Ebene des Typs \mathcal{E}_1 mit Hilfe des Konstruktionsprinzips 2.15 geschildert. Die Konstruktion der Gebietseinteilungen auf allen übrigen Ebenentypen geschieht völlig analog dazu, im Folgenden werden die entsprechenden Ergebnisse gezeigt.

In Analogie zum bisherigen Vorgehen werden dabei die unterschiedlichen Ebenentypen bzw. die Gebiete auf diesen Ebenentypen in Bezug auf die Raute $R_{(5,-6)}$ betrachtet. Blickrichtung ist daher die in Abbildung A.6 gezeigte Perspektive. Mit Hilfe des Analogieprinzips A.6 lassen sich die Ergebnisse, wie in 2.2.2 veranschaulicht, jedoch auf alle jeweils 29 restlichen Ebenen eines bestimmten Typs übertragen. Ferner gilt:

Beobachtung A.9. *Für die Gebietseinteilung der Ebene eines beliebigen Typs $\mathcal{T} \neq \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ ist eine Fallunterscheidung in die Ebenentypen \mathcal{T}_+ sowie \mathcal{T}_- nicht notwendig!*

Beweis. Die Begrenzungsflächen aller (Teil-) Gebiete im Fenster V liegen gerade auf den 60 Ebenen des Typs \mathcal{E}_1 und \mathcal{E}_2 . Für diese Ebenen ist es daher entscheidend, ob die (Teil-) Gebiete ober- oder unterhalb dieser Ebenen betrachtet werden. Für alle restlichen Ebenen gilt diese Eigenschaft, zwei (Teil-) Gebiete voneinander zu trennen, gerade nicht, und somit muss hier diese Fallunterscheidung nicht bedacht werden. Für $\mathcal{T} \neq \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ gilt in Bezug auf Kriterium (2.3) somit stets: $(\mathcal{T} + \text{HK}(\pm w_i)) \notin \bar{V}$ für alle $1 \leq i \leq 6$. \square

Wie in Tabelle 2.2 in Kapitel 2 festgehalten, werden Gebiete gleichen Typs stets mit der gleichen Farbe markiert. Es gilt:

Gebiet	Farbe	Gebiet	Farbe	Gebiet	Farbe
Ω_4	Rosa	Ω_5	Gelb	Ω_{6a}	Blau
Ω_{6b}	Braun	Ω_7	Grau	Ω_8	Rot
Ω_9	Grün	Ω_{10}	Lila	Ω_{12}	Orange

Tabelle A.3.: Übersicht über die Farben zur Kennzeichnung der unterschiedlichen Gebiete

Die Gebietseinteilung der Ebene des Typs \mathcal{E}_{1+}

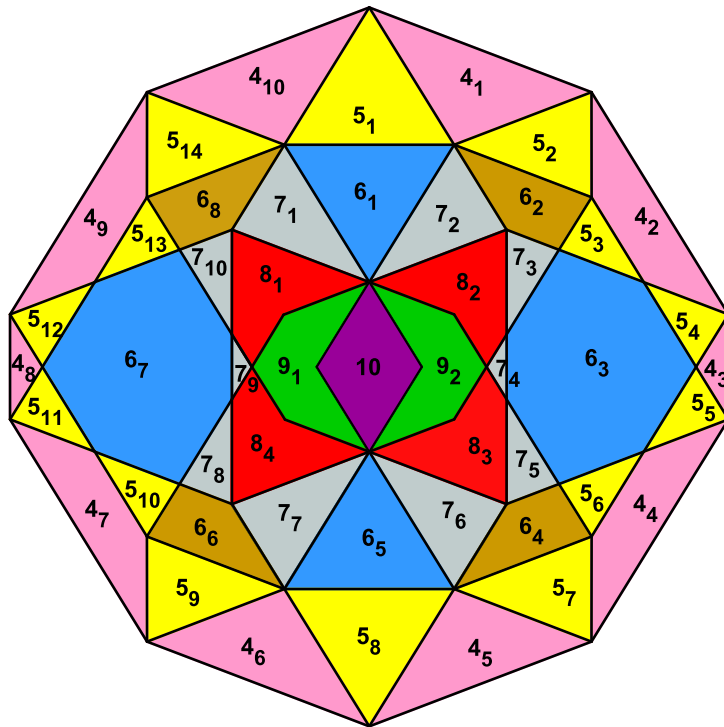


Abbildung A.11.: Die Gebietseinteilung der Ebene $E_{1+}^{(5,-6)}$

A.4. Die Gebietseinteilungen der unterschiedlichen Ebenentypen

Gebiet	Einheitsrichtungen	Gebiet	Einheitsrichtungen
4 ₁	$-w_1, -w_3, -w_4, +w_6$	6 ₁	$-w_1, -w_2, -w_3, -w_4, -w_5, +w_6$
4 ₂	$-w_1, +w_2, -w_3, +w_6$	6 ₂	$-w_1, +w_2, -w_3, -w_4, -w_5, +w_6$
4 ₃	$-w_1, +w_2, -w_3, +w_4$	6 ₃	$-w_1, +w_2, -w_3, +w_4, -w_5, +w_6$
4 ₄	$+w_2, -w_3, +w_4, -w_5$	6 ₄	$+w_1, +w_2, -w_3, +w_4, -w_5, +w_6$
4 ₅	$+w_1, -w_3, +w_4, -w_5$	6 ₅	$+w_1, -w_2, -w_3, +w_4, -w_5, +w_6$
4 ₆	$+w_1, -w_2, +w_4, -w_5$	6 ₆	$+w_1, -w_2, +w_3, +w_4, -w_5, +w_6$
4 ₇	$+w_1, -w_2, +w_3, -w_5$	6 ₇	$+w_1, -w_2, +w_3, -w_4, -w_5, +w_6$
4 ₈	$+w_1, -w_2, +w_3, -w_4$	6 ₈	$-w_1, -w_2, +w_3, -w_4, -w_5, +w_6$
4 ₉	$-w_2, +w_3, -w_4, +w_6$	7 ₁	$-w_1, -w_2, \pm w_3, -w_4, -w_5, +w_6$
4 ₁₀	$-w_1, -w_2, -w_4, +w_6$	7 ₂	$-w_1, \pm w_2, -w_3, -w_4, -w_5, +w_6$
5 ₁	$-w_1, -w_2, -w_3, -w_4, +w_6$	7 ₃	$-w_1, +w_2, -w_3, \pm w_4, -w_5, +w_6$
5 ₂	$-w_1, +w_2, -w_3, -w_4, +w_6$	7 ₄	$-w_1, \pm w_2, -w_3, +w_4, -w_5, +w_6$
5 ₃	$-w_1, +w_2, -w_3, -w_5, +w_6$	7 ₅	$\pm w_1, +w_2, -w_3, +w_4, -w_5, +w_6$
5 ₄	$-w_1, +w_2, -w_3, +w_4, +w_6$	7 ₆	$+w_1, \pm w_2, -w_3, +w_4, -w_5, +w_6$
5 ₅	$-w_1, +w_2, -w_3, +w_4, -w_5$	7 ₇	$+w_1, -w_2, \pm w_3, +w_4, -w_5, +w_6$
5 ₆	$+w_2, -w_3, +w_4, -w_5, +w_6$	7 ₈	$+w_1, -w_2, +w_3, \pm w_4, -w_5, +w_6$
5 ₇	$+w_1, +w_2, -w_3, +w_4, -w_5$	7 ₉	$+w_1, -w_2, \pm w_3, -w_4, -w_5, +w_6$
5 ₈	$+w_1, -w_2, -w_3, +w_4, -w_5$	7 ₁₀	$\pm w_1, -w_2, +w_3, -w_4, -w_5, +w_6$
5 ₉	$+w_1, -w_2, +w_3, +w_4, -w_5$	8 ₁	$\pm w_1, -w_2, \pm w_3, -w_4, -w_5, +w_6$
5 ₁₀	$+w_1, -w_2, +w_3, -w_5, +w_6$	8 ₂	$-w_1, \pm w_2, -w_3, \pm w_4, -w_5, +w_6$
5 ₁₁	$+w_1, -w_2, +w_3, -w_4, -w_5$	8 ₃	$\pm w_1, \pm w_2, -w_3, +w_4, -w_5, +w_6$
5 ₁₂	$+w_1, -w_2, +w_3, -w_4, +w_6$	8 ₄	$+w_1, -w_2, \pm w_3, \pm w_4, -w_5, +w_6$
5 ₁₃	$-w_2, +w_3, -w_4, -w_5, +w_6$	9 ₁	$\pm w_1, -w_2, \pm w_3, \pm w_4, -w_5, +w_6$
5 ₁₄	$-w_1, -w_2, +w_3, -w_4, +w_6$	9 ₂	$\pm w_1, \pm w_2, -w_3, \pm w_4, -w_5, +w_6$
		10	$\pm w_1, \pm w_2, \pm w_3, \pm w_4, -w_5, +w_6$

Tabelle A.4.: Die auf der Ebene $E_{1+}^{(5,-6)}$ in den einzelnen Gebieten erlaubten Einheitsrichtungen $\pm w_i$ mit $1 \leq i \leq 6$

Die Gebietseinteilung der Ebene des Typs \mathcal{E}_{1-}

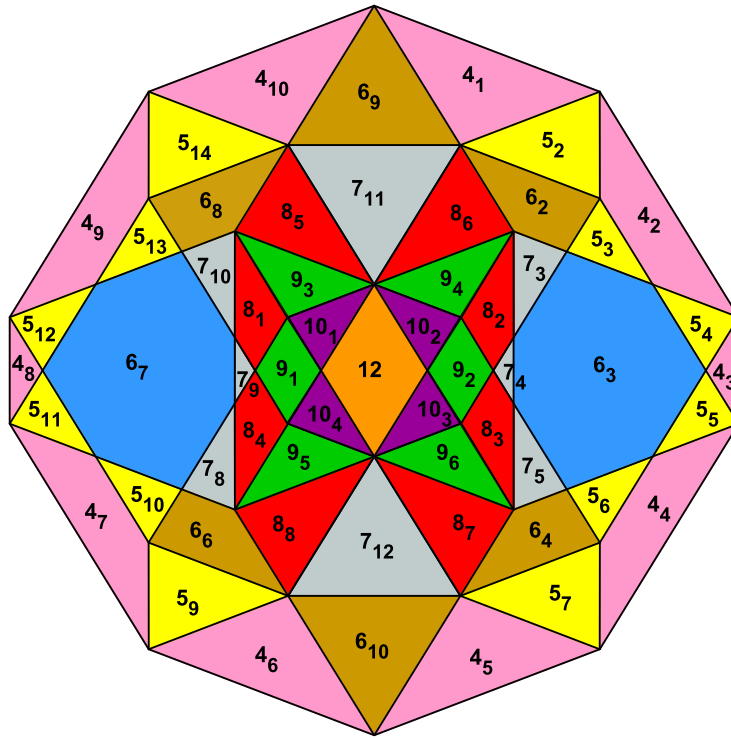


Abbildung A.12.: Die Gebietseinteilung der Ebene $E_{1-}^{(5,-6)}$

A.4. Die Gebietseinteilungen der unterschiedlichen Ebenentypen

Gebiet	Einheitsrichtungen	Gebiet	Einheitsrichtungen
4 ₁	$-w_1, -w_3, -w_4, +w_6$	6 ₉	$-w_1, -w_2, -w_3, -w_4, +w_5, +w_6$
4 ₂	$-w_1, +w_2, -w_3, +w_6$	6 ₁₀	$+w_1, -w_2, -w_3, +w_4, -w_5, -w_6$
4 ₃	$-w_1, +w_2, -w_3, +w_4$	7 ₃	$-w_1, +w_2, -w_3, \pm w_4, -w_5, +w_6$
4 ₄	$+w_2, -w_3, +w_4, -w_5$	7 ₄	$-w_1, \pm w_2, -w_3, +w_4, -w_5, +w_6$
4 ₅	$+w_1, -w_3, +w_4, -w_5$	7 ₅	$\pm w_1, +w_2, -w_3, +w_4, -w_5, +w_6$
4 ₆	$+w_1, -w_2, +w_4, -w_5$	7 ₈	$+w_1, -w_2, +w_3, \pm w_4, -w_5, +w_6$
4 ₇	$+w_1, -w_2, +w_3, -w_5$	7 ₉	$+w_1, -w_2, \pm w_3, -w_4, -w_5, +w_6$
4 ₈	$+w_1, -w_2, +w_3, -w_4$	7 ₁₀	$\pm w_1, -w_2, +w_3, -w_4, -w_5, +w_6$
4 ₉	$-w_2, +w_3, -w_4, +w_6$	7 ₁₁	$-w_1, -w_2, -w_3, -w_4, \pm w_5, +w_6$
4 ₁₀	$-w_1, -w_2, -w_4, +w_6$	7 ₁₂	$+w_1, -w_2, -w_3, +w_4, -w_5, \pm w_6$
5 ₂	$-w_1, +w_2, -w_3, -w_4, +w_6$	8 ₁	$\pm w_1, -w_2, \pm w_3, -w_4, -w_5, +w_6$
5 ₃	$-w_1, +w_2, -w_3, -w_5, +w_6$	8 ₂	$-w_1, \pm w_2, -w_3, \pm w_4, -w_5, +w_6$
5 ₄	$-w_1, +w_2, -w_3, +w_4, +w_6$	8 ₃	$\pm w_1, \pm w_2, -w_3, +w_4, -w_5, +w_6$
5 ₅	$-w_1, +w_2, -w_3, +w_4, -w_5$	8 ₄	$+w_1, -w_2, \pm w_3, \pm w_4, -w_5, +w_6$
5 ₆	$+w_2, -w_3, +w_4, -w_5, +w_6$	8 ₅	$-w_1, -w_2, \pm w_3, -w_4, \pm w_5, +w_6$
5 ₇	$+w_1, +w_2, -w_3, +w_4, -w_5$	8 ₆	$-w_1, \pm w_2, -w_3, -w_4, \pm w_5, +w_6$
5 ₉	$+w_1, -w_2, +w_3, +w_4, -w_5$	8 ₇	$+w_1, \pm w_2, -w_3, +w_4, -w_5, \pm w_6$
5 ₁₀	$+w_1, -w_2, +w_3, -w_5, +w_6$	8 ₈	$+w_1, -w_2, \pm w_3, +w_4, -w_5, \pm w_6$
5 ₁₁	$+w_1, -w_2, +w_3, -w_4, -w_5$	9 ₁	$\pm w_1, -w_2, \pm w_3, \pm w_4, -w_5, +w_6$
5 ₁₂	$+w_1, -w_2, +w_3, -w_4, +w_6$	9 ₂	$\pm w_1, \pm w_2, -w_3, \pm w_4, -w_5, +w_6$
5 ₁₃	$-w_2, +w_3, -w_4, -w_5, +w_6$	9 ₃	$\pm w_1, -w_2, \pm w_3, -w_4, \pm w_5, +w_6$
5 ₁₄	$-w_1, -w_2, +w_3, -w_4, +w_6$	9 ₄	$-w_1, \pm w_2, -w_3, \pm w_4, \pm w_5, +w_6$
6 ₂	$-w_1, +w_2, -w_3, -w_4, -w_5, +w_6$	9 ₅	$+w_1, -w_2, \pm w_3, \pm w_4, -w_5, \pm w_6$
6 ₃	$-w_1, +w_2, -w_3, +w_4, -w_5, +w_6$	9 ₆	$\pm w_1, \pm w_2, -w_3, +w_4, -w_5, \pm w_6$
6 ₄	$+w_1, +w_2, -w_3, +w_4, -w_5, +w_6$	10 ₁	$\pm w_1, -w_2, \pm w_3, \pm w_4, \pm w_5, +w_6$
6 ₆	$+w_1, -w_2, +w_3, +w_4, -w_5, +w_6$	10 ₂	$\pm w_1, \pm w_2, -w_3, \pm w_4, \pm w_5, +w_6$
6 ₇	$+w_1, -w_2, +w_3, -w_4, -w_5, +w_6$	10 ₃	$\pm w_1, \pm w_2, -w_3, \pm w_4, -w_5, \pm w_6$
6 ₈	$-w_1, -w_2, +w_3, -w_4, -w_5, +w_6$	10 ₄	$\pm w_1, -w_2, \pm w_3, \pm w_4, -w_5, \pm w_6$
		12	$\pm w_1, \pm w_2, \pm w_3, \pm w_4, \pm w_5, \pm w_6$

Tabelle A.5.: Die auf der Ebene $E_{1-}^{(5,-6)}$ in den einzelnen Gebieten erlaubten Einheitsrichtungen $\pm w_i$ mit $1 \leq i \leq 6$

Die Gebietseinteilung der Ebene des Typs \mathcal{E}_{2+}

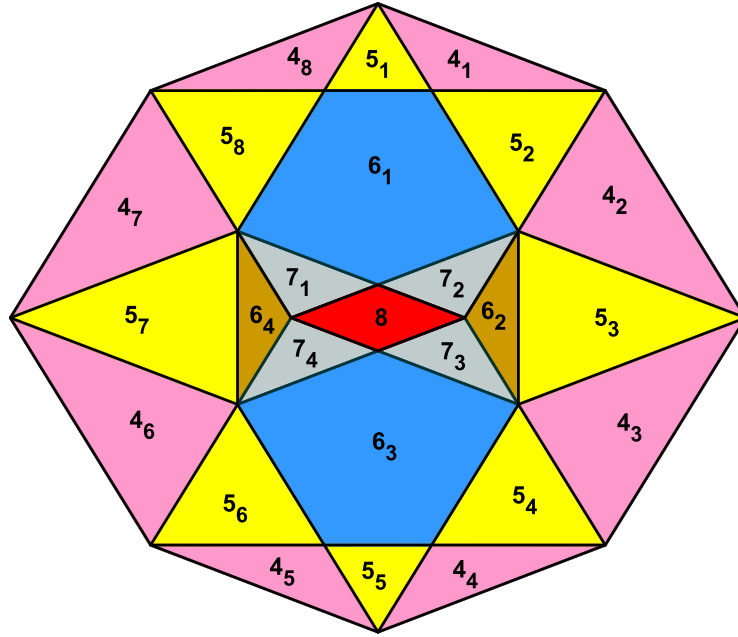


Abbildung A.13.: Die Gebietseinteilung der Ebene $E_{2+}^{(5,-6)}$

Gebiet	Einheitsrichtungen	Gebiet	Einheitsrichtungen
4 ₁	$-w_1, -w_3, -w_4, +w_6$	5 ₆	$+w_1, -w_2, +w_4, -w_5, +w_6$
4 ₂	$-w_1, -w_3, -w_5, +w_6$	5 ₇	$+w_1, -w_2, -w_4, -w_5, +w_6$
4 ₃	$-w_3, +w_4, -w_5, +w_6$	5 ₈	$-w_1, -w_2, -w_4, -w_5, +w_6$
4 ₄	$+w_1, -w_3, +w_4, -w_5$	6 ₁	$-w_1, -w_2, -w_3, -w_4, -w_5, +w_6$
4 ₅	$+w_1, -w_2, +w_4, -w_5$	6 ₂	$-w_1, -w_2, -w_3, +w_4, -w_5, +w_6$
4 ₆	$+w_1, -w_2, -w_5, +w_6$	6 ₃	$+w_1, -w_2, -w_3, +w_4, -w_5, +w_6$
4 ₇	$-w_2, -w_4, -w_5, +w_6$	6 ₄	$+w_1, -w_2, -w_3, -w_4, -w_5, +w_6$
4 ₈	$-w_1, -w_2, -w_4, +w_6$	7 ₁	$\pm w_1, -w_2, -w_3, -w_4, -w_5, +w_6$
5 ₁	$-w_1, -w_2, -w_3, -w_4, +w_6$	7 ₂	$-w_1, -w_2, -w_3, \pm w_4, -w_5, +w_6$
5 ₂	$-w_1, -w_3, -w_4, -w_5, +w_6$	7 ₃	$\pm w_1, -w_2, -w_3, +w_4, -w_5, +w_6$
5 ₃	$-w_1, -w_3, +w_4, -w_5, +w_6$	7 ₄	$+w_1, -w_2, -w_3, \pm w_4, -w_5, +w_6$
5 ₄	$+w_1, -w_3, +w_4, -w_5, +w_6$	8	$\pm w_1, -w_2, -w_3, \pm w_4, -w_5, +w_6$
5 ₅	$+w_1, -w_2, -w_3, +w_4, -w_5$		

Tabelle A.6.: Die auf der Ebene $E_{2+}^{(5,-6)}$ in den einzelnen Gebieten erlaubten Einheitsrichtungen $\pm w_i$ mit $1 \leq i \leq 6$

Die Gebietseinteilung der Ebene des Typs \mathcal{E}_{2-}

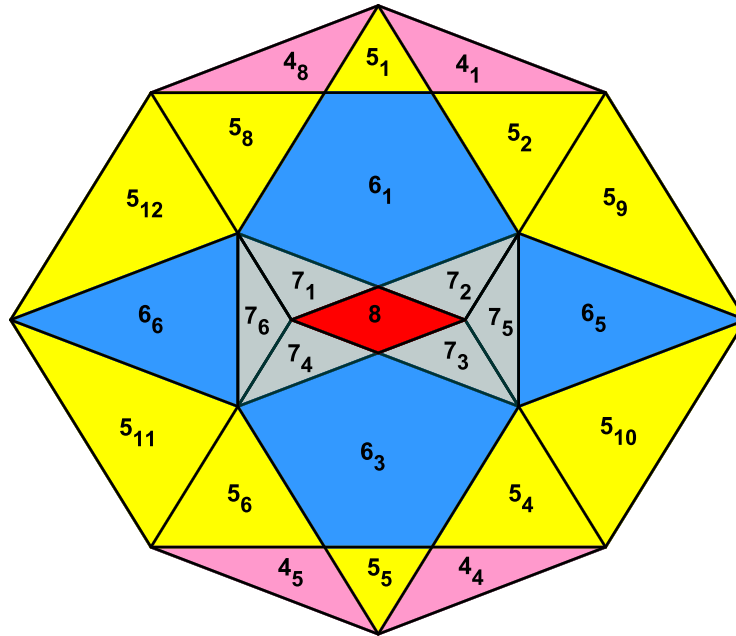


Abbildung A.14.: Die Gebietseinteilung der Ebene $E_{2-}^{(5,-6)}$

Gebiet	Einheitsrichtungen	Gebiet	Einheitsrichtungen
4 ₁	$-w_1, -w_3, -w_4, +w_6$	5 ₁₂	$-w_2, +w_3, -w_4, -w_5, +w_6$
4 ₄	$+w_1, -w_3, +w_4, -w_5$	6 ₁	$-w_1, -w_2, -w_3, -w_4, -w_5, +w_6$
4 ₅	$+w_1, -w_2, +w_4, -w_5$	6 ₃	$+w_1, -w_2, -w_3, +w_4, -w_5, +w_6$
4 ₈	$-w_1, -w_2, -w_4, +w_6$	6 ₅	$-w_1, +w_2, -w_3, +w_4, -w_5, +w_6$
5 ₁	$-w_1, -w_2, -w_3, -w_4, +w_6$	6 ₆	$+w_1, -w_2, +w_3, -w_4, -w_5, +w_6$
5 ₂	$-w_1, -w_3, -w_4, -w_5, +w_6$	7 ₁	$\pm w_1, -w_2, -w_3, -w_4, -w_5, +w_6$
5 ₄	$+w_1, -w_3, +w_4, -w_5, +w_6$	7 ₂	$-w_1, -w_2, -w_3, \pm w_4, -w_5, +w_6$
5 ₅	$+w_1, -w_2, -w_3, +w_4, -w_5$	7 ₃	$\pm w_1, -w_2, -w_3, +w_4, -w_5, +w_6$
5 ₆	$+w_1, -w_2, +w_4, -w_5, +w_6$	7 ₄	$+w_1, -w_2, -w_3, \pm w_4, -w_5, +w_6$
5 ₈	$-w_1, -w_2, -w_4, -w_5, +w_6$	7 ₅	$-w_1, \pm w_2, -w_3, +w_4, -w_5, +w_6$
5 ₉	$-w_1, +w_2, -w_3, -w_5, +w_6$	7 ₆	$+w_1, -w_2, \pm w_3, -w_4, -w_5, +w_6$
5 ₁₀	$+w_2, -w_3, +w_4, -w_5, +w_6$	8	$\pm w_1, -w_2, -w_3, \pm w_4, -w_5, +w_6$
5 ₁₁	$+w_1, -w_2, +w_3, -w_5, +w_6$		

Tabelle A.7.: Die auf der Ebene $E_{2-}^{(5,-6)}$ in den einzelnen Gebieten erlaubten Einheitsrichtungen $\pm w_i$ mit $1 \leq i \leq 6$

Die Gebietseinteilung der Ebene des Typs \mathcal{A}

Die Ebene des Typs \mathcal{A} liegt auf dem Rand des Fensters V , folglich hat der Schnitt dieser Ebene mit V gerade die Gestalt einer Fensterraute R . Die Ebene des Typs \mathcal{A} selbst schneidet das offene Fenster V nicht, die Gebietsaufteilung der Ebene des Typs \mathcal{A} erfasst daher genauer gesagt die Gebiete *kurz unterhalb* dieser Ebene.

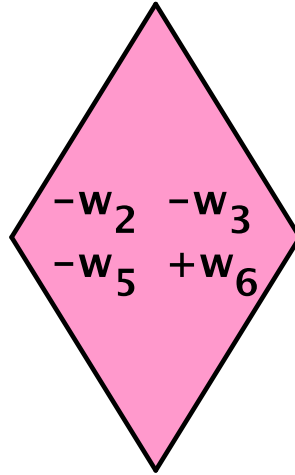


Abbildung A.15.: Unterhalb der Ebene $A^{(5,-6)}$ liegt ein Gebiet des Typs Ω_4 , welches für den Projektionspunkt z_F eines Gitterpunktes $z \in (E + I^6) \subset \mathbb{R}^6$ gerade die oben genannten Einheitsrichtungen $-w_2$ und $-w_3$ sowie $-w_5$ und $+w_6$ erlaubt.

Die Gebietseinteilung der Ebene des Typs \mathcal{B}

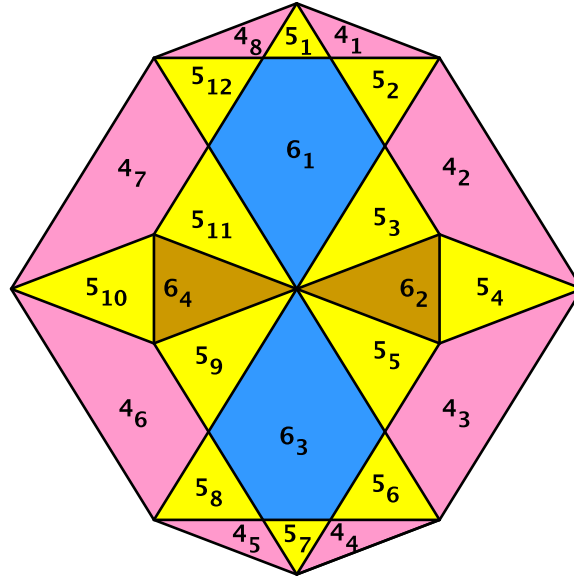


Abbildung A.16.: Die Gebietseinteilung der Ebene $B^{(5,-6)}$

Gebiet	Einheitsrichtungen	Gebiet	Einheitsrichtungen
4 ₁	$-w_1, -w_3, -w_4, +w_6$	5 ₅	$-w_2, -w_3, +w_4, -w_5, +w_6$
4 ₂	$-w_1, -w_3, -w_5, +w_6$	5 ₆	$+w_1, -w_3, +w_4, -w_5, +w_6$
4 ₃	$-w_3, +w_4, -w_5, +w_6$	5 ₇	$+w_1, -w_2, -w_3, +w_4, -w_5$
4 ₄	$+w_1, -w_3, +w_4, -w_5$	5 ₈	$+w_1, -w_2, +w_4, -w_5, +w_6$
4 ₅	$+w_1, -w_2, +w_4, -w_5$	5 ₉	$+w_1, -w_2, -w_3, -w_5, +w_6$
4 ₆	$+w_1, -w_2, -w_5, +w_6$	5 ₁₀	$+w_1, -w_2, -w_4, -w_5, +w_6$
4 ₇	$-w_2, -w_4, -w_5, +w_6$	5 ₁₁	$-w_2, -w_3, -w_4, -w_5, +w_6$
4 ₈	$-w_1, -w_2, -w_4, +w_6$	5 ₁₂	$-w_1, -w_2, -w_4, -w_5, +w_6$
5 ₁	$-w_1, -w_2, -w_3, -w_4, +w_6$	6 ₁	$-w_1, -w_2, -w_3, -w_4, -w_5, +w_6$
5 ₂	$-w_1, -w_3, -w_4, -w_5, +w_6$	6 ₂	$-w_1, -w_2, -w_3, +w_4, -w_5, +w_6$
5 ₃	$-w_1, -w_2, -w_3, -w_5, +w_6$	6 ₃	$+w_1, -w_2, -w_3, +w_4, -w_5, +w_6$
5 ₄	$-w_1, -w_3, +w_4, -w_5, +w_6$	6 ₄	$+w_1, -w_2, -w_3, -w_4, -w_5, +w_6$

Tabelle A.8.: Die auf der Ebene $B^{(5,-6)}$ in den einzelnen Gebieten erlaubten Einheitsrichtungen $\pm w_i$ mit $1 \leq i \leq 6$

Die Gebietseinteilung der Ebene des Typs \mathcal{C}

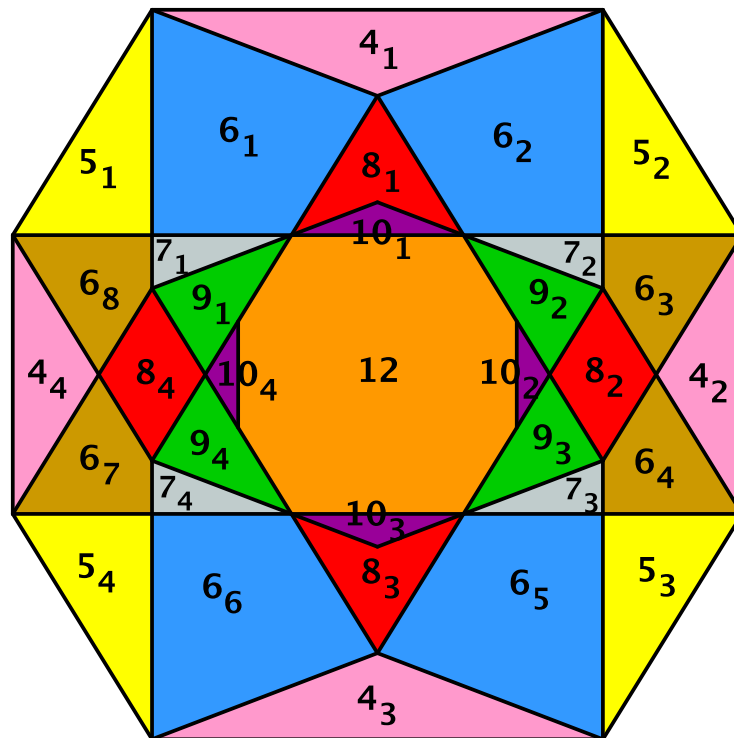


Abbildung A.17.: Die Gebietseinteilung der Ebene $\mathcal{C}^{(5,-6)}$

A.4. Die Gebietseinteilungen der unterschiedlichen Ebenentypen

Gebiet	Einheitsrichtungen	Gebiet	Einheitsrichtungen
4 ₁	$-w_1, -w_4, +w_5, +w_6$	7 ₁	$\pm w_1, -w_2, +w_3, -w_4, +w_5, +w_6$
4 ₂	$-w_1, +w_2, -w_3, +w_4$	7 ₂	$-w_1, +w_2, -w_3, \pm w_4, +w_5, +w_6$
4 ₃	$+w_1, +w_4, -w_5, -w_6$	7 ₃	$\pm w_1, +w_2, -w_3, +w_4, -w_5, -w_6$
4 ₄	$+w_1, -w_2, +w_3, -w_4$	7 ₄	$+w_1, -w_2, +w_3, \pm w_4, -w_5, -w_6$
5 ₁	$-w_2, +w_3, -w_4, +w_5, +w_6$	8 ₁	$-w_1, \pm w_2, \pm w_3, -w_4, +w_5, +w_6$
5 ₂	$-w_1, +w_2, -w_3, +w_5, +w_6$	8 ₂	$-w_1, +w_2, -w_3, +w_4, \pm w_5, \pm w_6$
5 ₃	$+w_2, -w_3, +w_4, -w_5, -w_6$	8 ₃	$+w_1, \pm w_2, \pm w_3, +w_4, -w_5, -w_6$
5 ₄	$+w_1, -w_2, +w_3, -w_5, -w_6$	8 ₄	$+w_1, -w_2, +w_3, -w_4, \pm w_5, \pm w_6$
6 ₁	$-w_1, -w_2, +w_3, -w_4, +w_5, +w_6$	9 ₁	$\pm w_1, -w_2, +w_3, -w_4, \pm w_5, \pm w_6$
6 ₂	$-w_1, +w_2, -w_3, -w_4, +w_5, +w_6$	9 ₂	$-w_1, +w_2, -w_3, \pm w_4, \pm w_5, \pm w_6$
6 ₃	$-w_1, +w_2, -w_3, +w_4, +w_5, +w_6$	9 ₃	$\pm w_1, +w_2, -w_3, +w_4, \pm w_5, \pm w_6$
6 ₄	$-w_1, +w_2, -w_3, +w_4, -w_5, -w_6$	9 ₄	$+w_1, -w_2, +w_3, \pm w_4, \pm w_5, \pm w_6$
6 ₅	$+w_1, +w_2, -w_3, +w_4, -w_5, -w_6$	10 ₁	$-w_1, \pm w_2, \pm w_3, -w_4, \pm w_5, \pm w_6$
6 ₆	$+w_1, -w_2, +w_3, +w_4, -w_5, -w_6$	10 ₂	$\pm w_1, +w_2, -w_3, \pm w_4, \pm w_5, \pm w_6$
6 ₇	$+w_1, -w_2, +w_3, -w_4, -w_5, -w_6$	10 ₃	$+w_1, \pm w_2, \pm w_3, +w_4, \pm w_5, \pm w_6$
6 ₈	$+w_1, -w_2, +w_3, -w_4, +w_5, +w_6$	10 ₄	$\pm w_1, -w_2, +w_3, \pm w_4, \pm w_5, \pm w_6$
		12	$\pm w_1, \pm w_2, \pm w_3, \pm w_4, \pm w_5, \pm w_6$

Tabelle A.9.: Die auf der Ebene $C^{(5,-6)}$ in den einzelnen Gebieten erlaubten Einheitsrichtungen $\pm w_i$ mit $1 \leq i \leq 6$

Die Gebietseinteilung der Ebene des Typs \mathcal{D}

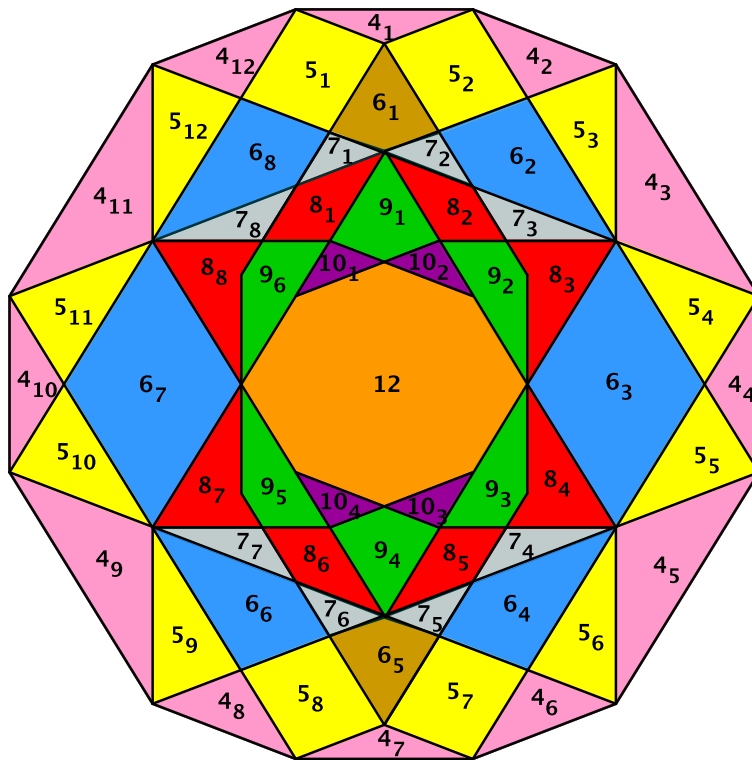


Abbildung A.18.: Die Gebietseinteilung der Ebene $D^{(5,-6)}$

A.4. Die Gebietseinteilungen der unterschiedlichen Ebenentypen

Gebiet	Einheitsrichtungen	Gebiet	Einheitsrichtungen
4 ₁	$-w_1, -w_4, +w_5, +w_6$	6 ₇	$+w_1, -w_2, +w_3, -w_4, +w_5, -w_6$
4 ₂	$-w_1, +w_2, -w_4, +w_5$	6 ₈	$-w_1, -w_2, +w_3, -w_4, +w_5, +w_6$
4 ₃	$-w_1, +w_2, -w_3, +w_5$	7 ₁	$-w_1, \pm w_2, +w_3, -w_4, +w_5, +w_6$
4 ₄	$-w_1, +w_2, -w_3, +w_4$	7 ₂	$-w_1, +w_2, \pm w_3, -w_4, +w_5, +w_6$
4 ₅	$+w_2, -w_3, +w_4, -w_6$	7 ₃	$-w_1, +w_2, -w_3, -w_4, +w_5, \pm w_6$
4 ₆	$+w_1, +w_2, +w_4, -w_6$	7 ₄	$+w_1, +w_2, -w_3, +w_4, \pm w_5, -w_6$
4 ₇	$+w_1, +w_4, -w_5, -w_6$	7 ₅	$+w_1, +w_2, \pm w_3, +w_4, -w_5, -w_6$
4 ₈	$+w_1, +w_3, +w_4, -w_6$	7 ₆	$+w_1, \pm w_2, +w_3, +w_4, -w_5, -w_6$
4 ₉	$+w_1, -w_2, +w_3, -w_6$	7 ₇	$+w_1, -w_2, +w_3, +w_4, \pm w_5, -w_6$
4 ₁₀	$+w_1, -w_2, +w_3, -w_4$	7 ₈	$-w_1, -w_2, +w_3, -w_4, +w_5, \pm w_6$
4 ₁₁	$-w_2, +w_3, -w_4, +w_5$	8 ₁	$-w_1, \pm w_2, +w_3, -w_4, +w_5, \pm w_6$
4 ₁₂	$-w_1, +w_3, -w_4, +w_5$	8 ₂	$-w_1, +w_2, \pm w_3, -w_4, +w_5, \pm w_6$
5 ₁	$-w_1, +w_3, -w_4, +w_5, +w_6$	8 ₃	$-w_1, +w_2, -w_3, \pm w_4, +w_5, \pm w_6$
5 ₂	$-w_1, +w_2, -w_4, +w_5, +w_6$	8 ₄	$\pm w_1, +w_2, -w_3, +w_4, \pm w_5, -w_6$
5 ₃	$-w_1, +w_2, -w_3, -w_4, +w_5$	8 ₅	$+w_1, +w_2, \pm w_3, +w_4, \pm w_5, -w_6$
5 ₄	$-w_1, +w_2, -w_3, +w_4, +w_5$	8 ₆	$+w_1, \pm w_2, +w_3, +w_4, \pm w_5, -w_6$
5 ₅	$-w_1, +w_2, -w_3, +w_4, -w_6$	8 ₇	$+w_1, -w_2, +w_3, \pm w_4, \pm w_5, -w_6$
5 ₆	$+w_1, +w_2, -w_3, +w_4, -w_6$	8 ₈	$\pm w_1, -w_2, +w_3, -w_4, +w_5, \pm w_6$
5 ₇	$+w_1, +w_2, +w_4, -w_5, -w_6$	9 ₁	$-w_1, \pm w_2, \pm w_3, -w_4, +w_5, \pm w_6$
5 ₈	$+w_1, +w_3, +w_4, -w_5, -w_6$	9 ₂	$-w_1, +w_2, \pm w_3, \pm w_4, +w_5, \pm w_6$
5 ₉	$+w_1, -w_2, +w_3, +w_4, -w_6$	9 ₃	$\pm w_1, +w_2, \pm w_3, +w_4, \pm w_5, -w_6$
5 ₁₀	$+w_1, -w_2, +w_3, -w_4, -w_6$	9 ₄	$+w_1, \pm w_2, \pm w_3, +w_4, \pm w_5, -w_6$
5 ₁₁	$+w_1, -w_2, +w_3, -w_4, +w_5$	9 ₅	$+w_1, \pm w_2, +w_3, \pm w_4, \pm w_5, -w_6$
5 ₁₂	$-w_1, -w_2, +w_3, -w_4, +w_5$	9 ₆	$\pm w_1, \pm w_2, +w_3, -w_4, +w_5, \pm w_6$
6 ₁	$-w_1, +w_2, +w_3, -w_4, +w_5, +w_6$	10 ₁	$\pm w_1, \pm w_2, \pm w_3, -w_4, +w_5, \pm w_6$
6 ₂	$-w_1, +w_2, -w_3, -w_4, +w_5, +w_6$	10 ₂	$-w_1, \pm w_2, \pm w_3, \pm w_4, +w_5, \pm w_6$
6 ₃	$-w_1, +w_2, -w_3, +w_4, +w_5, -w_6$	10 ₃	$\pm w_1, \pm w_2, \pm w_3, +w_4, \pm w_5, -w_6$
6 ₄	$+w_1, +w_2, -w_3, +w_4, -w_5, -w_6$	10 ₄	$+w_1, \pm w_2, \pm w_3, \pm w_4, \pm w_5, -w_6$
6 ₅	$+w_1, +w_2, +w_3, +w_4, -w_5, -w_6$	12	$\pm w_1, \pm w_2, \pm w_3, \pm w_4, \pm w_5, \pm w_6$
6 ₆	$+w_1, -w_2, +w_3, +w_4, -w_5, -w_6$		

Tabelle A.10.: Die auf der Ebene $D^{(5,-6)}$ in den einzelnen Gebieten erlaubten Einheitsrichtungen $\pm w_i$ mit $1 \leq i \leq 6$

Die Gebietseinteilung der Ebene des Typs \mathcal{G}

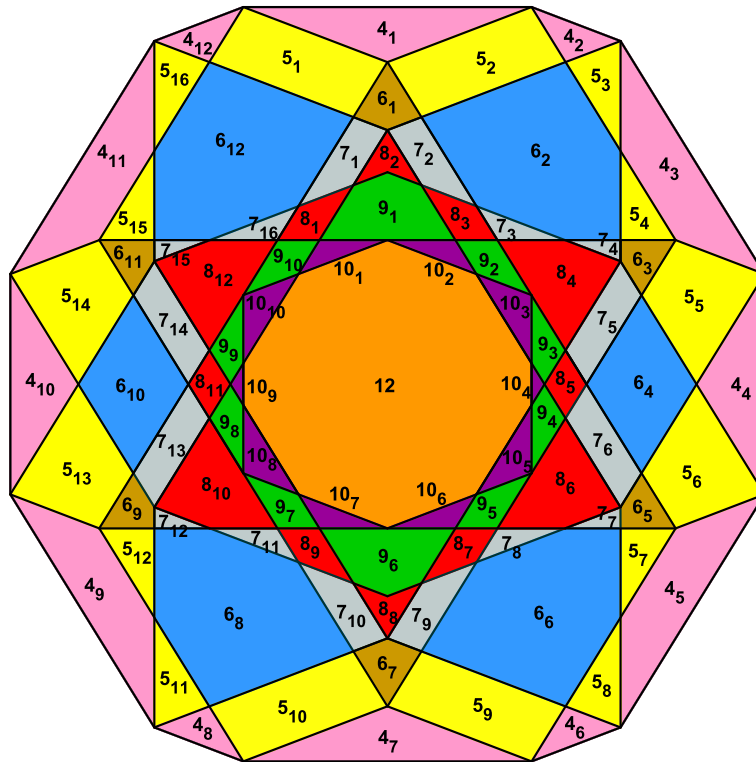


Abbildung A.19.: Die Gebietseinteilung der Ebene $G^{(5,-6)}$

Gebiet	Einheitsrichtungen	Gebiet	Einheitsrichtungen
4 ₁	$-w_1, -w_4, +w_5, +w_6$	7 ₆	$-w_1, +w_2, -w_3, +w_4, \pm w_5, -w_6$
4 ₂	$-w_1, +w_2, -w_4, +w_5$	7 ₇	$\pm w_1, +w_2, -w_3, +w_4, -w_5, -w_6$
4 ₃	$-w_1, +w_2, -w_3, +w_5$	7 ₈	$+w_1, +w_2, -w_3, +w_4, \pm w_5, -w_6$
4 ₄	$-w_1, +w_2, -w_3, +w_4$	7 ₉	$+w_1, +w_2, \pm w_3, +w_4, -w_5, -w_6$
4 ₅	$+w_2, -w_3, +w_4, -w_6$	7 ₁₀	$+w_1, \pm w_2, +w_3, +w_4, -w_5, -w_6$
4 ₆	$+w_1, +w_2, +w_4, -w_6$	7 ₁₁	$+w_1, -w_2, +w_3, +w_4, \pm w_5, -w_6$
4 ₇	$+w_1, +w_4, -w_5, -w_6$	7 ₁₂	$+w_1, -w_2, +w_3, \pm w_4, -w_5, -w_6$
4 ₈	$+w_1, +w_3, +w_4, -w_6$	7 ₁₃	$+w_1, -w_2, +w_3, -w_4, \pm w_5, -w_6$
4 ₉	$+w_1, -w_2, +w_3, -w_6$	7 ₁₄	$+w_1, -w_2, +w_3, -w_4, +w_5, \pm w_6$
4 ₁₀	$+w_1, -w_2, +w_3, -w_4$	7 ₁₅	$\pm w_1, -w_2, +w_3, -w_4, +w_5, +w_6$
4 ₁₁	$-w_2, +w_3, -w_4, +w_5$	7 ₁₆	$-w_1, -w_2, +w_3, -w_4, +w_5, \pm w_6$
4 ₁₂	$-w_1, +w_3, -w_4, +w_5$	8 ₁	$-w_1, \pm w_2, +w_3, -w_4, +w_5, \pm w_6$
5 ₁	$-w_1, +w_3, -w_4, +w_5, +w_6$	8 ₂	$-w_1, \pm w_2, \pm w_3, -w_4, +w_5, +w_6$
5 ₂	$-w_1, +w_2, -w_4, +w_5, +w_6$	8 ₃	$-w_1, +w_2, \pm w_3, -w_4, +w_5, \pm w_6$
5 ₃	$-w_1, +w_2, -w_3, -w_4, +w_5$	8 ₄	$-w_1, +w_2, -w_3, \pm w_4, +w_5, \pm w_6$
5 ₄	$-w_1, +w_2, -w_3, +w_5, +w_6$	8 ₅	$-w_1, +w_2, -w_3, +w_4, \pm w_5, \pm w_6$
5 ₅	$-w_1, +w_2, -w_3, +w_4, +w_5$	8 ₆	$\pm w_1, +w_2, -w_3, +w_4, \pm w_5, -w_6$
5 ₆	$-w_1, +w_2, -w_3, +w_4, -w_6$	8 ₇	$+w_1, +w_2, \pm w_3, +w_4, \pm w_5, -w_6$
5 ₇	$+w_2, -w_3, +w_4, -w_5, -w_6$	8 ₈	$+w_1, \pm w_2, \pm w_3, +w_4, -w_5, -w_6$
5 ₈	$+w_1, +w_2, -w_3, +w_4, -w_6$	8 ₉	$+w_1, \pm w_2, +w_3, +w_4, \pm w_5, -w_6$
5 ₉	$+w_1, +w_2, +w_4, -w_5, -w_6$	8 ₁₀	$+w_1, -w_2, +w_3, \pm w_4, \pm w_5, -w_6$
5 ₁₀	$+w_1, +w_3, +w_4, -w_5, -w_6$	8 ₁₁	$+w_1, -w_2, +w_3, -w_4, \pm w_5, \pm w_6$
5 ₁₁	$+w_1, -w_2, +w_3, +w_4, -w_6$	8 ₁₂	$\pm w_1, -w_2, +w_3, -w_4, +w_5, \pm w_6$
5 ₁₂	$+w_1, -w_2, +w_3, -w_5, -w_6$	9 ₁	$-w_1, \pm w_2, \pm w_3, -w_4, +w_5, \pm w_6$
5 ₁₃	$+w_1, -w_2, +w_3, -w_4, -w_6$	9 ₂	$-w_1, +w_2, \pm w_3, \pm w_4, +w_5, \pm w_6$
5 ₁₄	$+w_1, -w_2, +w_3, -w_4, +w_5$	9 ₃	$-w_1, +w_2, -w_3, \pm w_4, \pm w_5, \pm w_6$
5 ₁₅	$-w_2, +w_3, -w_4, +w_5, +w_6$	9 ₄	$\pm w_1, +w_2, -w_3, +w_4, \pm w_5, \pm w_6$
5 ₁₆	$-w_1, -w_2, +w_3, -w_4, +w_5$	9 ₅	$\pm w_1, +w_2, \pm w_3, +w_4, \pm w_5, -w_6$
6 ₁	$-w_1, +w_2, +w_3, -w_4, +w_5, +w_6$	9 ₆	$+w_1, \pm w_2, \pm w_3, +w_4, \pm w_5, -w_6$
6 ₂	$-w_1, +w_2, -w_3, -w_4, +w_5, +w_6$	9 ₇	$+w_1, \pm w_2, +w_3, \pm w_4, \pm w_5, -w_6$
6 ₃	$-w_1, +w_2, -w_3, +w_4, +w_5, +w_6$	9 ₈	$+w_1, -w_2, +w_3, \pm w_4, \pm w_5, \pm w_6$
6 ₄	$-w_1, +w_2, -w_3, +w_4, +w_5, -w_6$	9 ₉	$\pm w_1, -w_2, +w_3, -w_4, \pm w_5, \pm w_6$
6 ₅	$-w_1, +w_2, -w_3, +w_4, -w_5, -w_6$	9 ₁₀	$\pm w_1, \pm w_2, +w_3, -w_4, +w_5, \pm w_6$
6 ₆	$+w_1, +w_2, -w_3, +w_4, -w_5, -w_6$	10 ₁	$\pm w_1, \pm w_2, \pm w_3, -w_4, +w_5, \pm w_6$
6 ₇	$+w_1 + w_2, +w_3, +w_4, -w_5, -w_6$	10 ₂	$-w_1, \pm w_2, \pm w_3, \pm w_4, +w_5, \pm w_6$
6 ₈	$+w_1, -w_2, +w_3, +w_4, -w_5, -w_6$	10 ₃	$-w_1, +w_2, \pm w_3, \pm w_4, \pm w_5, \pm w_6$
6 ₉	$+w_1, -w_2, +w_3, -w_4, -w_5, -w_6$	10 ₄	$\pm w_1, +w_2, -w_3, \pm w_4, \pm w_5, \pm w_6$
6 ₁₀	$+w_1, -w_2, +w_3, -w_4, +w_5, -w_6$	10 ₅	$\pm w_1, +w_2, \pm w_3, +w_4, \pm w_5, \pm w_6$
6 ₁₁	$+w_1, -w_2, +w_3, -w_4, +w_5, +w_6$	10 ₆	$\pm w_1, \pm w_2, \pm w_3, +w_4, \pm w_5, -w_6$
6 ₁₂	$-w_1, -w_2, +w_3, -w_4, +w_5, +w_6$	10 ₇	$+w_1, \pm w_2, \pm w_3, \pm w_4, \pm w_5, -w_6$
7 ₁	$-w_1, \pm w_2, +w_3, -w_4, +w_5, +w_6$	10 ₈	$+w_1, \pm w_2, +w_3, \pm w_4, \pm w_5, \pm w_6$
7 ₂	$-w_1, +w_2, \pm w_3, -w_4, +w_5, +w_6$	10 ₉	$\pm w_1, -w_2, +w_3, \pm w_4, \pm w_5, \pm w_6$
7 ₃	$-w_1, +w_2, -w_3, -w_4, +w_5, \pm w_6$	10 ₁₀	$\pm w_1, \pm w_2, +w_3, -w_4, \pm w_5, \pm w_6$
7 ₄	$-w_1, +w_2, -w_3, \pm w_4, +w_5, +w_6$	12	$\pm w_1, \pm w_2, \pm w_3, \pm w_4, \pm w_5, \pm w_6$
7 ₅	$-w_1, +w_2, -w_3, +w_4, +w_5, \pm w_6$		

Tabelle A.11.: Die auf der Ebene $G^{(5,-6)}$ in den einzelnen Gebieten erlaubten Einheitsrichtungen $\pm w_i$ mit $1 \leq i \leq 6$

Die Gebietseinteilung der Ebene des Typs \mathcal{K} und des Typs \mathcal{L}

Auf Grund der Tatsache, dass der Abstand zwischen der Ebene des Typs \mathcal{K} und der Ebene des Typs \mathcal{L} sehr klein ist, vgl. Abbildung A.10, kann man bereits vermuten, dass beide Ebenentypen im Fenster V exakt die gleichen Gebiete ω_j mit $j = 4, 5, 6_a, 6_b, 7, 8, 9, 10, 12$ schneiden. Die Ermittlung der Gebietsbilder bestätigt diese Vermutung und daher können wir die in den einzelnen Gebieten jeweils erlaubten Einheitsrichtungen $\pm w_i$ mit $1 \leq i \leq 6$ für die beiden Ebenen $K^{(5,-6)}$ und $L^{(5,-6)}$ in einer Tabelle zusammenfassen, siehe Tabelle A.12.

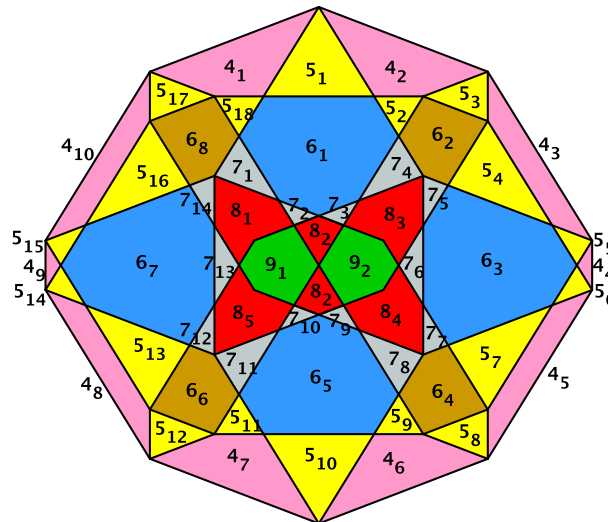


Abbildung A.20.: Die Gebietseinteilung der Ebene $K^{(5,-6)}$

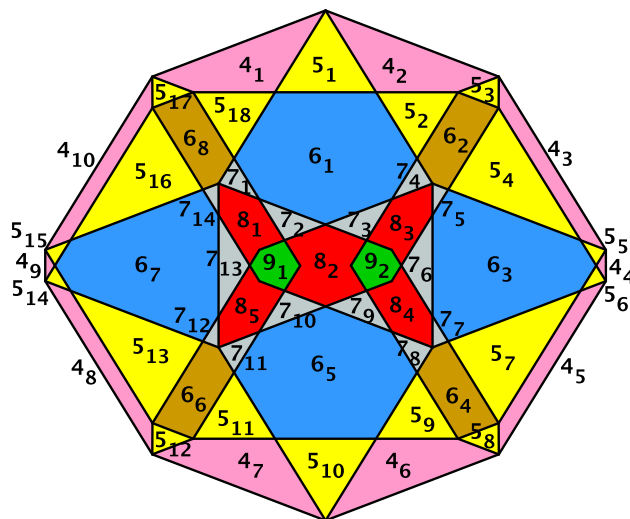


Abbildung A.21.: Die Gebietseinteilung der Ebene $L^{(5,-6)}$

A.4. Die Gebietseinteilungen der unterschiedlichen Ebenentypen

Gebiet	Einheitsrichtungen	Gebiet	Einheitsrichtungen
4 ₁	$-w_1, -w_2, -w_4, +w_6$	6 ₁	$-w_1, -w_2, -w_3, -w_4, -w_5, +w_6$
4 ₂	$-w_1, -w_3, -w_4, +w_6$	6 ₂	$-w_1, +w_2, -w_3, -w_4, -w_5, +w_6$
4 ₃	$-w_1, +w_2, -w_3, +w_6$	6 ₃	$-w_1, +w_2, -w_3, +w_4, -w_5, +w_6$
4 ₄	$-w_1, +w_2, -w_3, +w_4$	6 ₄	$+w_1, +w_2, -w_3, +w_4, -w_5, +w_6$
4 ₅	$+w_2, -w_3, +w_4, -w_5$	6 ₅	$+w_1, -w_2, -w_3, +w_4, -w_5, +w_6$
4 ₆	$+w_1, -w_3, +w_4, -w_5$	6 ₆	$+w_1, -w_2, +w_3, +w_4, -w_5, +w_6$
4 ₇	$+w_1, -w_2, +w_4, -w_5$	6 ₇	$+w_1, -w_2, +w_3, -w_4, -w_5, +w_6$
4 ₈	$+w_1, -w_2, +w_3, -w_5$	6 ₈	$-w_1, -w_2, +w_3, -w_4, -w_5, +w_6$
4 ₉	$+w_1, -w_2, +w_3, -w_4$	7 ₁	$-w_1, -w_2, \pm w_3, -w_4, -w_5, +w_6$
4 ₁₀	$-w_2, +w_3, -w_4, +w_6$	7 ₂	$\pm w_1, -w_2, -w_3, -w_4, -w_5, +w_6$
5 ₁	$-w_1, -w_2, -w_3, -w_4, +w_6$	7 ₃	$-w_1, -w_2, -w_3, \pm w_4, -w_5, +w_6$
5 ₂	$-w_1, -w_3, -w_4, -w_5, +w_6$	7 ₄	$-w_1, \pm w_2, -w_3, -w_4, -w_5, +w_6$
5 ₃	$-w_1, +w_2, -w_3, -w_4, +w_6$	7 ₅	$-w_1, +w_2, -w_3, \pm w_4, -w_5, +w_6$
5 ₄	$-w_1, +w_2, -w_3, -w_5, +w_6$	7 ₆	$-w_1, \pm w_2, -w_3, +w_4, -w_5, +w_6$
5 ₅	$-w_1, +w_2, -w_3, +w_4, +w_6$	7 ₇	$\pm w_1, +w_2, -w_3, +w_4, -w_5, +w_6$
5 ₆	$-w_1, +w_2, -w_3, +w_4, -w_5$	7 ₈	$+w_1, \pm w_2, -w_3, +w_4, -w_5, +w_6$
5 ₇	$+w_2, -w_3, +w_4, -w_5, +w_6$	7 ₉	$\pm w_1, -w_2, -w_3, +w_4, -w_5, +w_6$
5 ₈	$+w_1, +w_2, -w_3, +w_4, -w_5$	7 ₁₀	$+w_1, -w_2, -w_3, \pm w_4, -w_5, +w_6$
5 ₉	$+w_1, -w_3, +w_4, -w_5, +w_6$	7 ₁₁	$+w_1, -w_2, \pm w_3, +w_4, -w_5, +w_6$
5 ₁₀	$+w_1, -w_2, -w_3, +w_4, -w_5$	7 ₁₂	$+w_1, -w_2, +w_3, \pm w_4, -w_5, +w_6$
5 ₁₁	$+w_1, -w_2, +w_4, -w_5, +w_6$	7 ₁₃	$+w_1, -w_2, \pm w_3, -w_4, -w_5, +w_6$
5 ₁₂	$+w_1, -w_2, +w_3, +w_4, -w_5$	7 ₁₄	$\pm w_1, -w_2, +w_3, -w_4, -w_5, +w_6$
5 ₁₃	$+w_1, -w_2, +w_3, -w_5, +w_6$	8 ₁	$\pm w_1, -w_2, \pm w_3, -w_4, -w_5, +w_6$
5 ₁₄	$+w_1, -w_2, +w_3, -w_4, -w_5$	8 ₂	$\pm w_1, -w_2, -w_3, \pm w_4, -w_5, +w_6$
5 ₁₅	$+w_1, -w_2, +w_3, -w_4, +w_6$	8 ₃	$-w_1, \pm w_2, -w_3, \pm w_4, -w_5, +w_6$
5 ₁₆	$-w_2, +w_3, -w_4, -w_5, +w_6$	8 ₄	$\pm w_1, \pm w_2, -w_3, +w_4, -w_5, +w_6$
5 ₁₇	$-w_1, -w_2, +w_3, -w_4, +w_6$	8 ₅	$+w_1, -w_2, \pm w_3, \pm w_4, -w_5, +w_6$
5 ₁₈	$-w_1, -w_2, -w_4, -w_5, +w_6$	9 ₁	$\pm w_1, -w_2, \pm w_3, \pm w_4, -w_5, +w_6$
		9 ₂	$\pm w_1, \pm w_2, -w_3, \pm w_4, -w_5, +w_6$

Tabelle A.12.: Die auf den Ebenen $K^{(5,-6)}$ und $L^{(5,-6)}$ in den einzelnen Gebieten erlaubten Einheitsrichtungen $\pm w_i$ mit $1 \leq i \leq 6$

Die Gebietseinteilung der Ebene des Typs \mathcal{F}

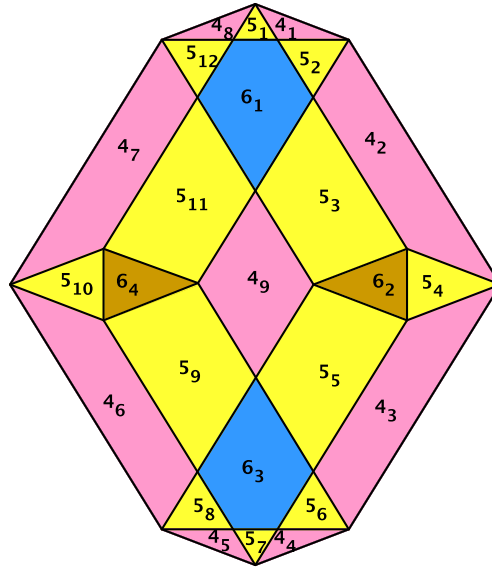


Abbildung A.22.: Die Gebietseinteilung der Ebene $F^{(5,-6)}$

Gebiet	Einheitsrichtungen	Gebiet	Einheitsrichtungen
4_1	$-w_1, -w_3, -w_4, +w_6$	5_5	$-w_2, -w_3, +w_4, -w_5, +w_6$
4_2	$-w_1, -w_3, -w_5, +w_6$	5_6	$+w_1, -w_3, +w_4, -w_5, +w_6$
4_3	$-w_3, +w_4, -w_5, +w_6$	5_7	$+w_1, -w_2, -w_3, +w_4, -w_5$
4_4	$+w_1, -w_3, +w_4, -w_5$	5_8	$+w_1, -w_2, +w_4, -w_5, +w_6$
4_5	$+w_1, -w_2, +w_4, -w_5$	5_9	$+w_1, -w_2, -w_3, -w_5, +w_6$
4_6	$+w_1, -w_2, -w_5, +w_6$	5_{10}	$+w_1, -w_2, -w_4, -w_5, +w_6$
4_7	$-w_2, -w_4, -w_5, +w_6$	5_{11}	$-w_2, -w_3, -w_4, -w_5, +w_6$
4_8	$-w_1, -w_2, -w_4, +w_6$	5_{12}	$-w_1, -w_2, -w_4, -w_5, +w_6$
4_9	$-w_2, -w_3, -w_5, +w_6$	6_1	$-w_1, -w_2, -w_3, -w_4, -w_5, +w_6$
5_1	$-w_1, -w_2, -w_3, -w_4, +w_6$	6_2	$-w_1, -w_2, -w_3, +w_4, -w_5, +w_6$
5_2	$-w_1, -w_3, -w_4, -w_5, +w_6$	6_3	$+w_1, -w_2, -w_3, +w_4, -w_5, +w_6$
5_3	$-w_1, -w_2, -w_3, -w_5, +w_6$	6_4	$+w_1, -w_2, -w_3, -w_4, -w_5, +w_6$
5_4	$-w_1, -w_3, +w_4, -w_5, +w_6$		

Tabelle A.13.: Die auf der Ebene $F^{(5,-6)}$ in den einzelnen Gebieten erlaubten Einheitsrichtungen $\pm w_i$ mit $1 \leq i \leq 6$

Literaturverzeichnis

- [B] DE BRUIJN, N. G.: Algebraic Theory of Penrose's Non-Periodic Tilings of the Plane, *Indagationes Mathematicae* **43** (1981), 39–66
- [C] COXETER, H. S. M.: *The Beauty of Geometry: Twelve Essays*, Dover Publications, Mineola 1999. Unveränderte Neuveröffentlichung von *Twelve Geometric Essays*, Southern Illinois University Press, Carbondale 1968
- [D] PAGE, R.: Penrose-Muster: Unterteilung und Projektionsmethode, *Schriftliche Hausarbeit zur 1. Staatsprüfung für das Lehramt an Gymnasien*, Augsburg 2008
- [DC] [HTTP://WWW.DROPCITYDOC.COM/DOMES.HTML](http://www.dropcitydoc.com/DOMES.HTML)
- [E] ESCHENBURG, J.-H.: Die Zahl Fünf und die Quasikristalle, *Preprint*, Augsburg 2004
- [ER] ESCHENBURG, J.-H.; RIVERTZ, H. J.: Self Similar Symmetric Planar Tilings, *Journal of Geometry* **87** (2007), 55–75
- [G] GARDNER, M.: Mathematical Games, *Scientific American* **236** (1977), 110–121
- [GR] GÄHLER, F.; RHYNER, J.: Equivalence of the Generalized Grid and Projection Methods for the Construction of Quasiperiodic Tilings, *Journal of Physics A: Mathematical and General* **19** (1986), 267–277
- [GS] GRÜNBAUM, B.; SHEPHARD, G. S.: *Tilings and Patterns*, W.H. Freeman, New York 1987
- [K] KATZ, A.: Theory of Matching Rules for the 3-Dimensional Penrose Tiling, *Communications in Mathematical Physics* **118** (1988), 263–288
- [KD] KATZ, A.; DUNEAU, M.: Quasiperiodic Patterns and Icosahedral Symmetry, *Physical Review Letters* **47** (1986), 181–196
- [KN] KRAMER, P.; NERI, R.: On Periodic and Non-Periodic Space Fillings of E^m Obtained by Projection, *Acta Crystallographica A* **40** (1984), 580–587
- [LS] LEVINE, D.; STEINHARDT, P. J.: Quasicrystals. I. Definition and Structure, *Physical Review B* **34** (1986), 596–616

- [LUS] LU, P. J.; STEINHARDT, P. J.: Decagonal and Quasi-Crystalline Tilings in Medieval Islamic Architecture, *Science* **315** (2007), 1106–1110
- [M1] MACKAY, A. L.: De Nive Quinquangula: On the Pentagonal Snowflake, *Soviet Physics. Crystallography* **26** (1981), 517–522
- [M2] MACKAY, A. L.: Crystallography and the Penrose Pattern, *Physica A* **114** (1982), 609–613
- [MT] MIYAZAKI, K.; TAKADA, I.: Uniform Ant-Hills in the World of Golden Isozonohedra, *Structural Topology* **4** (1980), 21–30
- [O1] OGAWA, T.: On the Structure of a Quasicrystal – Three-Dimensional Penrose Transformation, *Journal of the Physical Society of Japan* **54** (1985), 3205–3208
- [O2] OGAWA, T.: Symmetry of Three-Dimensional Quasicrystals, *Materials Science Forum* **22–24** (1987), 187–200
- [P] PENROSE, R.: Pentaplexity - a Class of Non-Periodic Tilings of the Plane, *Mathematical Intelligencer* **2** (1979), 32–37
- [R] RIVERTZ, H. J.: On Quasicrystals, *Preprint*, Trondheim 2008
- [S1] SENECHAL, M.: *Quasicrystals and Geometry*, Cambridge University Press, Cambridge 1995
- [S2] SENECHAL, M.: The Mysterious Mr. Ammann, *The Mathematical Intelligencer* **26** (2004), 10–21
- [S3] SENECHAL, M.: Donald and the Golden Rhombohedra, in: DAVIS, C.; ELLERS E. W. (HRSG.): *The Coxeter Legacy*, AMS Fields, Providence 2006
- [SBGC] SHECHTMAN D.; BLECH, I.; GRATIAS, D.; CAHN, J. W.: Metallic Phase with Long-Range Orientational Order and No Translational Symmetry, *Physical Review Letters* **53** (1984), 1951–1953
- [SC] SCHLEICH, B.: Penrose Tilings in Medieval Islamic Culture, *Bachelorarbeit*, Augsburg 2009
- [SS] SOCOLAR, J. E. S.; STEINHARDT, P. J.: Quasicrystals. II. Unit-Cell Configurations, *Physical Review B* **34** (1986), 617–647
- [SSL] SOCOLAR, J. E. S.; STEINHARDT, P. J.; LEVINE, D.: Quasicrystals with Arbitrary Orientational Symmetry, *Physical Review B* **32** (1985), 5547–5550
- [ST] STERN, D.: Penrose Type Tilings, *Diplomarbeit*, Augsburg 2002
- [ZT] [HTTP://WWW.ZOMETOOL.COM](http://www.zometool.com)
- [ZW] [HTTP://ZOMEWORKS.COM/ABOUT-US](http://zomeworks.com/about-us)

LEBENS LAUF

Persönliche Daten

Name	Ruth Maria Katharina Dietl, geb. Page
Kontakt	ruth.dietl@math.uni-augsburg.de

Ausbildung

1993 – 2002	A. B. von Stettensches Institut Augsburg Allgemeine Hochschulreife
Herbst 2003	Beginn des Studiums für das Lehramt an Gymnasien mit der Fächerkombination Mathematik und Katholische Religion
Frühjahr 2005	Zwischenprüfung Mathematik
Herbst 2005	Zwischenprüfung Katholische Religion
Januar 2008	Schriftliche Hausarbeit zur ersten Staatsprüfung für das Lehramt an Gymnasien: <i>Penrose-Muster: Unterteilung und Selbstähnlichkeit</i> , betreut von Prof. Dr. Jost-Hinrich Eschenburg
Herbst 2008	Erstes Staatsexamen für das Lehramt an Gymnasien
Frühjahr 2009	Wissenschaftliche Mitarbeiterin im DFG-Projekt <i>Globale Differentialgeometrie</i> unter der Leitung von Prof. Dr. Jost-Hinrich Eschenburg am Lehrstuhl für Differentialgeometrie der Universität Augsburg